Binomiális együtthatók, multihalmazok

Kombinatorika

2. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. február 14.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n-nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van.

Megjegyzés. $k > n$ esetén $\binom{n}{k} = 0$, hiszen egy n elemű halmaznak nincs n-nél nagyobb elemszámú részhalmaza.

Jelölés. Ha H egy véges halmaz, k pedig egy természetes szám, akkor $\binom{H}{k}$ jelöli a H halmaz k-elemű részhalmazainak halmazát, azaz

$$\binom{H}{k} := \{R \subseteq H : |R| = k\}.$$

Például $\binom{[n]}{k}$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazainak halmaza.

Tehát $\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right|$.

A Pascal-háromszög:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

a)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Bizonyítás. Világos, hogy egy n elemű halmaznak 1 db 0 elemű részhalmaza van (az üres halmaz), és 1 db n elemű részhalmaza van (saját maga).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\ & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \color{blue}{\binom{4}{2}} & \color{red}{+} & \color{blue}{\binom{4}{3}} & & \binom{4}{4} & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \color{blue}{\binom{5}{3}} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & \color{blue}{6} & \color{red}{+} & \color{blue}{4} & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & \color{blue}{10} & & 5 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\vdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 + 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

b) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Lásd következő dia.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\color{red}\binom{5}{0} & & \color{green}\binom{5}{1} & & \color{blue}\binom{5}{2} & & \color{blue}\binom{5}{3} & & \color{green}\binom{5}{4} & & \color{red}\binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\color{red}1 & & \color{green}5 & & \color{blue}10 & & \color{blue}10 & & \color{green}5 & & \color{red}1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

c) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \text{ha } 0 \le k \le n$$

Bizonyítás. Egy n elemű halmaz $n-k$ elemű részhalmazai éppen a k elemű részhalmazok komplementerei. Precízebben fogalmazva, az $A \mapsto \overline{A}$ leképezés egy $\binom{[n]}{k} \to \binom{[n]}{n-k}$ bijekció, ahol $\overline{A} := [n] \setminus A$. (Miért?)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
\xrightarrow{\Sigma} 2^5
$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
=
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \xrightarrow{\Sigma} 2^5 \\
 & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

A Pascal-háromszög tulajdonságai:

d) $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Bizonyítás. Mindkét oldal $[n]$ részhalmazait számolja meg (ld. előző előadás). $\square$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k-elemű részhalmazait számolja meg.

Bal oldal: Ez az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható definíciója. ✓

Jobb oldal: Az $\binom{n-1}{k}$ tag az $[n]$ halmaz azon k-elemű részhalmazait számolja meg, amelyek nem tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok éppen az $n-1$ elemű $\{2, 3, \ldots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazai.)

Az $\binom{n-1}{k-1}$ tag az $[n]$ halmaz azon k-elemű részhalmazait számolja meg, amelyek tartalmazzák az '1' elemet. (Hiszen ezek a részhalmazok $\{1\} \dot{\cup} R$ alakúak, ahol R a $\{2, 3, \ldots, n\}$ halmaz tetszőleges $(k-1)$-elemű részhalmaza lehet.) ✓ □

$$\binom{n}{k} = \color{red}{\binom{n-1}{k-1}} + \color{green}{\binom{n-1}{k}}, \quad \text{ha } n, k \geq 1$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $[n]$ halmaz k-elemű részhalmazait számolja meg.

$$\left.\begin{array}{ccccc}
\color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{4} & \color{blue}{5} \\ \hline
\bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\
\bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
\bullet & \bullet & \circ & \circ & \bullet \\
\bullet & \circ & \bullet & \bullet & \circ \\
\bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
\bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet \\
\circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\
\circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\
\circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet \\
\circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}\right\} \tbinom{5}{3} \text{ db}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\color{blue}{1} & \color{blue}{2} & \color{blue}{3} & \color{blue}{4} & \color{blue}{5} \\ \hline
\end{array}$$
$$\color{red}{\left.\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & \bullet & \circ & \circ \\
\bullet & \bullet & \circ & \bullet & \circ \\
\bullet & \bullet & \circ & \circ & \bullet \\
\bullet & \circ & \bullet & \bullet & \circ \\
\bullet & \circ & \bullet & \circ & \bullet \\
\bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet
\end{array}\right\}} \tbinom{4}{2} \text{ db}$$
$$\color{green}{\left.\begin{array}{ccccc}
\circ & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\
\circ & \bullet & \bullet & \circ & \bullet \\
\circ & \bullet & \circ & \bullet & \bullet \\
\circ & \circ & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}\right\}} \tbinom{4}{3} \text{ db}$$

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Tétel. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, és $0! = 1$.

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Tétel. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Emlékeztető. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,$ és $0! = 1.$

Megjegyzés. A középső alak $k > n$ esetén is helyes választ ad (0-t), a jobb oldali alaknak csak $k \leq n$ esetén van értelme.

Megjegyzés. Elég az első egyenlőséget bizonyítani, mert a második egyenlőségnél csupán a törtet bővítettük $(n-k)$!-sal.

Tétel.
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy
$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$
Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó”) van, amelynek elemei („betűi”) az $\{1,\ldots,n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1, \dots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n-féle lehet. Bármi is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$-féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k-adik) elemet $(n-k+1)$-féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. ✓

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k} k! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1, \ldots, n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Jobb oldal: Egy ilyen sorozat 1. eleme n-féle lehet. Bármi is került az első helyre, a 2. elemet $(n-1)$-féleképpen választhatjuk az elsőtől különbözőnek. Utána a 3. elem kiválasztására $(n-2)$ lehetőség van. És így tovább, az utolsó (k-adik) elemet $(n-k+1)$-féleképpen választhatjuk meg. Ezen választási lehetőségek szorzata adja a jobb oldali választ. $\checkmark$

$$\square\,\square\,\square\,\square\,\square\,\square$$

Ez a (középiskolában is gyakran használt) indoklás nem túl precíz. Gondolkodjunk el azon, hogy hogyan kellene ezt precízen leírni, k szerinti indukcióval.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg kettős leszámlálással, hogy

$$\binom{n}{k}k! = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Mindkét oldal azt számolja meg, hogy hány olyan k hosszú sorozat („k betűs szó") van, amelynek elemei („betűi") az $\{1,\dots,n\}$ halmazból kerülnek ki, és a sorozat elemei mind különbözők.

Bal oldal: Most aszerint osztályozzuk a sorozatokat, hogy melyik k betű szerepel bennük.

Először eldöntjük, hogy melyik k (különböző) betű szerepeljen a sorozatunkban: Erre $\binom{n}{k}$ lehetőség van, mert $[n]$ egy k-elemű részhalmazát kell kijelölni.

Bárhogy is választottuk meg a sorozatba kerülő elemeket, ezeket $k!$-féle sorrendben lehet leírni (ld. középiskola / későbbi előadás, vagy ismételjük meg a jobb oldalnál alkalmazott gondolatot).

Ebből adódik a bal oldali válasz. ✓ □

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Binomiális tétel.
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n} y^n.$$

Megjegyzés. A binom kéttagú összeget (polinomot) jelöl. Ez a tétel a magyarázata annak, hogy az $\binom{n}{k}$ számokat „binomális együtthatóknak” nevezzük.

Megjegyzés. A tétel jobb oldalán szereplő binomiális együtthatók kiolvashatók a Pascal-háromszög megfelelő sorából (helyes sorrendben).

Megjegyzés. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Binomiális tétel.
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:
$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots yx + \dots + yyy\dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y. (Ez 2^n darab tag.)

Binomiális tétel.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Biz. Bontsuk fel a zárójeleket a tétel bal oldalán szereplő n tényezős szorzatban:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= (x+y)(x+y)(x+y)\dots(x+y)\\ &= xxx\dots xx + xxx\dots xy + xxx\dots yx + \dots + yyy\dots yy.\end{aligned}$$

A zárójelek felbontása után kapott összeg tagjai azok az n-tényezős szorzatok lesznek, amelyekben mindegyik tényező x vagy y. (Ez 2^n darab tag.)

Minden ilyen $yxx\dots yxy$ tag „hatvány alakban'' felírva $x^{n-k}y^k$ alakú lesz, ahol k az y-ok száma ($k \in \{0, \dots, n\}$). Egy rögzített k-ra tehát annyi tagból fog $x^{n-k}y^k$ adódni, ahányféleképpen fel lehet írni egy n-tényezős szorzatot („szót'') x és y tényezőkkel („betűkből'') úgy, hogy az n tényezőből pontosan k darab legyen y. Ez a szám pedig $\binom{n}{k}$, ennyiféleképpen tudjuk kijelölni az y-ok helyét. Ezért az összevonható tagok összevonása után a tétel jobb oldala adódik. $\square$

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.")

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Példa. A fenti példára az alaphalmaz $H = \{1, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \mathrm{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \mathrm{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad \mathrm{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális def. A multihalmaz nem feltétlenül különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amelyben lehetnek egyforma dolgok is.”)

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$ egy 11 elemű multihalmaz.

Egy M multihalmazt kényelmesebb (és hasznosabb) úgy megadni, hogy először megadjuk az M-ben előforduló különböző elemek (elemfajták) H halmazát, majd megmondjuk, hogy melyik elem(fajta) hányszor szerepel M-ben. A H halmazt M alaphalmazának nevezzük; azt hogy egy $h \in H$ elem hányszor szerepel M-ben, a h elem (M-beli) multiplicitásának nevezzük.

Megjegyzés. Technikai okokból a 0 multiplicitást is megengedjük, így a H halmaz nem egyértelmű. Például a fenti M multihalmaz alaphalmazába belevehetjük Budapestet is, azzal, hogy az M-beli multiplicitása 0.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Emlékezzünk, hogy ezen a kurzuson $0 \in \mathbb{N}$.

Most következik még néhány definíció, de ezeket nem memorizálni kell, hanem látni, hogy csupán a szemléletes multihalmaz képünk fogalmait ültetjük át a precíz környezetbe.

Informális. $M = \{1, 1, 1, \text{Szeged}, \text{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}, \text{Vuk}\}_{\text{multi}}$

Erre a példára az alaphalmaz $H = \{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$, a multiplicitások pedig

$$1 \mapsto 3, \quad \text{Szeged} \mapsto 2, \quad \sqrt{3} \mapsto 3, \quad 2022 \mapsto 1, \quad \text{Vuk} \mapsto 2.$$

Precíz def. Egy H halmaz feletti multihalmazon egy $H \to \mathbb{N}$ függvényt értünk.

Definíciók/elnevezések. Legyen M egy H feletti multihalmaz.

- Egy $h \in H$ elemre az $M(h)$ függvényérték a h elem M-beli multiplicitása.
- Akkor mondjuk, hogy a $h \in H$ elem eleme M-nek, ha $M(h) > 0$.
- Az M multihalmaz $|M|$-mel jelölt elemszáma az alaphalmaz-elemek M-beli multiplicitásainak összege:

$$|M| := \sum_{h \in H} M(h).$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Példa. Az $M = \{1, 1, 1, \mathrm{Szeged}, \mathrm{Szeged}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 2022, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ multihalmaz egy részmultihalmaza az $N = \{1, 1, \sqrt{3}, 2022, \mathrm{Vuk}, \mathrm{Vuk}\}_{\mathrm{multi}}$ multihalmaz.

$$\begin{array}{llllll} M\colon & 1 \mapsto 3, & \mathrm{Szeged} \mapsto 2, & \sqrt{3} \mapsto 3, & 2022 \mapsto 1, & \mathrm{Vuk} \mapsto 2 \\ N\colon & 1 \mapsto 2, & \mathrm{Szeged} \mapsto 0, & \sqrt{3} \mapsto 1, & 2022 \mapsto 1, & \mathrm{Vuk} \mapsto 2 \end{array}$$

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Ez az n elemű halmaz részhalmai számának általánosítása. (Miért?)

Definíció. Egy H feletti M multihalmaz részmultihalmazán egy olyan H feletti N multihalmazt értünk, amelyben minden elem multiplicitása legfeljebb akkora, mint M-ben, vagyis

$$N(h) \leq M(h), \quad \forall h \in H.$$

(Szemléletesen: „N-et megkaphatjuk M-ből elemek törlésével.")

Tétel. A $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ alaphalmaz feletti M multihalmaz részmultihalmazainak száma

$$(M(h_1) + 1)(M(h_2) + 1) \cdots (M(h_n) + 1).$$

Bizonyítás. Egy N részmultihalmazban a h_i elem $N(h_i)$ multiplicitása 0-tól $M(h_i)$-ig bármi lehet, ami $M(h_i) + 1$ lehetőség, mindegyik $i \in [n]$-re. További megkötés nincs, így a szorzási alapelv adja a bizonyítandót. $\square$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Egy n elemű H halmaz feletti k elemű multihalmaz tekinthető a H-ból k elem visszatevéses kihúzásával kapott kimenetelnek (ha az elemek kihúzási sorrendje nem számít), azaz az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjának.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$ halmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$ halmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni. Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$ halmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$ halmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni. Például, az $\{1, \text{Szeged}, \sqrt{3}, 2022, \text{Vuk}\}$ halmaz felett tekintsünk néhány 11 elemű multihalmazt (pirossal szerepelnek a multiplicitások):

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

A lényeg az, hogy annyi 11 elemű multihalmaz van a megadott 5 elemű alaphalmaz felett, ahányféleképpen fel tudunk írni egy 5 természetes számból álló sorozatot úgy, hogy a számok összege 11 legyen.

T. Egy rögzített n elemű alaphalmaz feletti k elemű multihalmazok száma

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) := \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Bizonyítás. Először gondolkodjunk el azon, hogy mit is kell összeszámolni.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \text{Szeged} & \sqrt{3} & 2022 & \text{Vuk} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array}$$

Általánosan, a következő lemmát kell igazolnunk a fenti tétel bizonyításához:

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$$

egyenletnek $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$ darab megoldása van a természetes számok(ból álló szám-n-esek) halmazán.

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \ldots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_2 \text{ db}}, \ldots, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_n \text{ db}}$$

Például ($n = 5$, $k = 11$ esetén),

$$\begin{aligned}
(3,2,3,1,2) &\mapsto \bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet,\bullet,\bullet\bullet \\
(3,2,3,2,1) &\mapsto \bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet,\bullet\bullet,\bullet \\
(0,5,0,2,4) &\mapsto ,\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet,,\bullet\bullet,\bullet\bullet\bullet\bullet \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \ldots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \ldots, m_n) \mapsto \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_2 \text{ db}}, \ldots, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám-n-eseket, amelyekre az elemek összege k, ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Lemma. Tetszőleges rögzített n, k természetes számokra

$$\left|\left\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n : m_1 + m_2 + \dots + m_n = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}.$$

Bizonyítás. Kódoljunk el egy $(m_1, \dots, m_n)$ n-est a következőképpen:

$$(m_1, m_2, \dots, m_n) \;\mapsto\; \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_1 \text{ db}}, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_2 \text{ db}}, \dots, \overbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet}^{m_n \text{ db}}$$

A lényeg az, hogy azokat az $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ szám-n-eseket, amelyekre az elemek összege k, ez a kódolás bijektíven átalakítja azokba a pöttyökből és vesszőkből álló $n+k-1$ hosszú jelsorozatokba, amelyek $n-1$ darab vesszőből és k darab pöttyből állnak, további megkötés nélkül. (Miért?)

Az ilyen jelsorozatok száma pedig $\binom{n+k-1}{k}$, hiszen ennyiféleképpen lehet $n-1$ vesszőt és k pöttyöt leírni valamilyen sorrendben: Ennyiféleképpen tudjuk kijelölni a k pötty helyét az $n+k-1$ karakterből álló jelsorozatban. $\square$