

Logikai szita

(tartalmazás és kizárás elve)

Kombinatorika

5. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2022.

Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

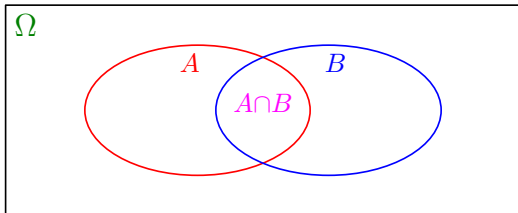
Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

Ω : az osztály tanulóinak halmaza (az alaphalmaz)

A : a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)

B : a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

Ismert: $|\Omega| = 30$, $|A| = 12$, $|B| = 14$, $|A \cap B| = 5$.



Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

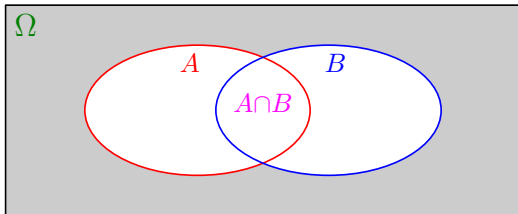
Ω : az osztály tanulójának halmaza (az alaphalmaz)

A : a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)

B : a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

Ismert: $|\Omega| = 30$, $|A| = 12$, $|B| = 14$, $|A \cap B| = 5$.

Kérdés: $|\overline{A \cup B}| = ?$ ← itt és a továbbiakban $\overline{H} := \Omega \setminus H$



Középiskolás feladat. Egy 30 fős osztályban a matematikát 12-en, a fizikát 14-en szeretik. 5 tanuló szereti mindkét tárgyat. Hányan vannak, akik a két tárgy közül egyiket sem szeretik?

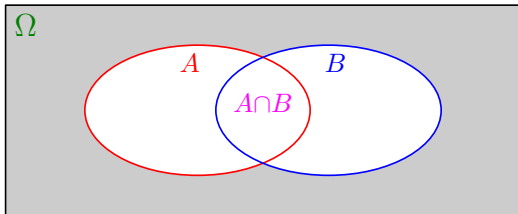
Ω : az osztály tanulóinak halmaza (az alaphalmaz)

A : a matematikát szerető tanulók halmaza ($A \subseteq \Omega$)

B : a fizikát szerető tanulók halmaza ($B \subseteq \Omega$)

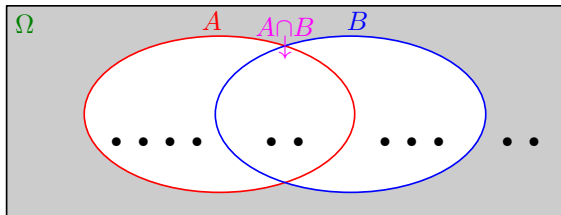
Ismert: $|\Omega| = 30$, $|A| = 12$, $|B| = 14$, $|A \cap B| = 5$.

Kérdés: $|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B| = 9$. □



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

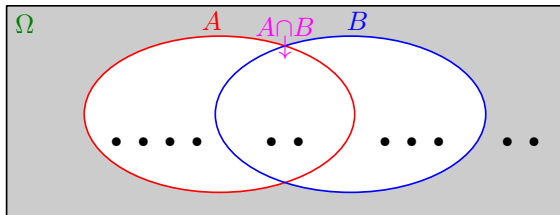
$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

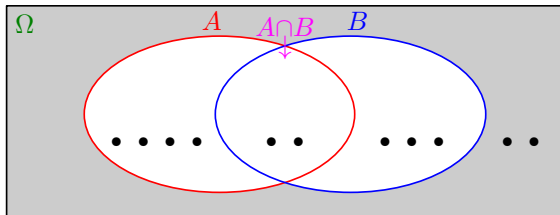
Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.”



Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

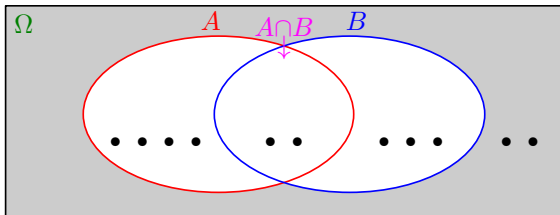


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

$$|H| = \sum_{h \in H} 1$$

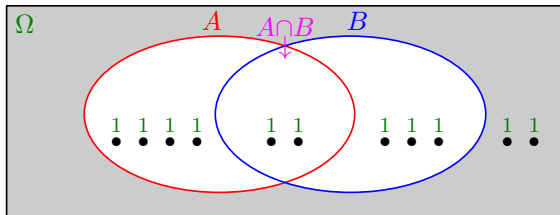


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére,

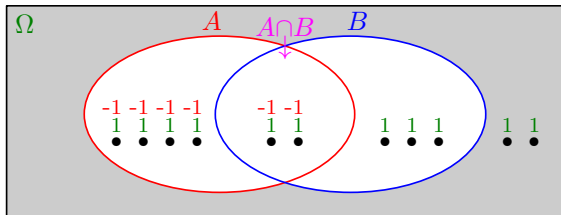


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire,

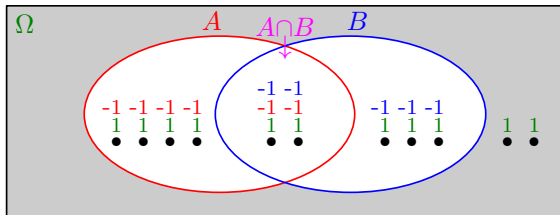


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire, (-1) -eket B elemeire,

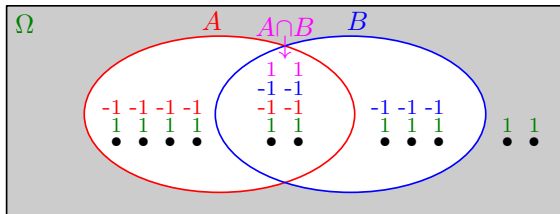


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire, (-1) -eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire.

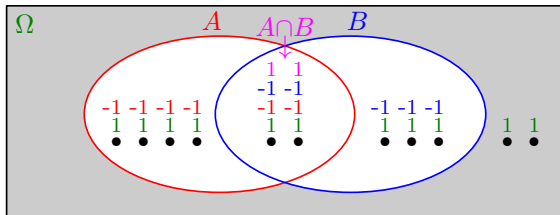


Tetszőleges $A, B \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire, (-1) -eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként” számolva).



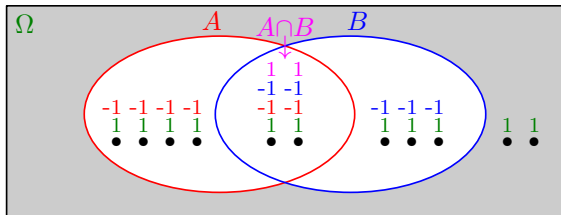
$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Bizonyítás. „A jobb oldal $\overline{A \cup B}$ elemeit 1-szer, $A \cup B$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.” De mit is jelent ez?

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire, (-1) -eket B elemeire, és 1-eseket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként” számolva).

Ha elemenként csoportosítva adjuk össze ezeket a számokat, akkor pedig a bal oldal adódik, mivel

$$\text{egy } x \in \Omega \text{ elemre írt számok összege} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{A \cup B} \\ 0, & \text{ha } x \in A \cup B. \end{cases}$$



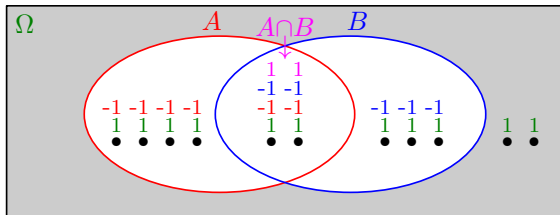
$$|\overline{A \cup B}| = |\Omega| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

Írjunk egy 1-est Ω minden elemére, majd (-1) -eket A elemeire, (-1) -eket B elemeire, és 1-eket $A \cap B$ elemeire. Világos, hogy a jobb oldal a felírt számok összege („színenként” számolva).

Ha elemenként csoportosítva adjuk össze ezeket a számokat, akkor pedig a bal oldal adódik, mivel

$$\text{egy } x \in \Omega \text{ elemre írt számok összege} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \overline{A \cup B} \\ 0, & \text{ha } x \in A \cup B. \end{cases}$$

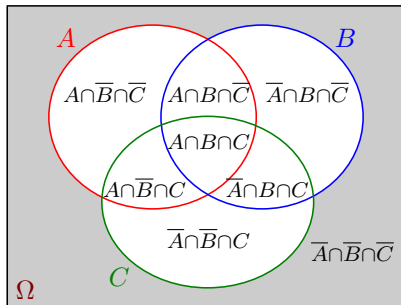
Az utolsó állítás 4 eset végiggondolásával ellenőrizhető: Csak az számít, hogy x az $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ és $A \cap B$ „cellák” közül melyikbe esik. \square



Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella” lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) \square



Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella” lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) \square

Már megbeszéltük, hogy mit értünk azon, hogy egy elemet valahányszor megszámlál a jobb oldal: az adott elemhez tartozó ± 1 -ek összegét (ahol a ± 1 -eket az előző bizonyításban látott módon osztjuk ki a jobb oldalon szereplő halmazok elemeire).

Hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges $A, B, C \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |\Omega| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

Bizonyítás. Az előző gondolatmenet elismételhető. Most nyolc „cella” lesz: $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, $\overline{A} \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$. Most is azt találjuk, hogy a $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ cella elemeit 1-szer, a többi cella elemeit 0-szor számolja meg a jobb oldal. (A részleteket mellőzzük.) \square

Próbáljuk meg ábra nélkül is végiggondolni, hogy az egyes „cellák” elemeit a jobb oldal hányszor számolja meg, és ehhez mely tagokat (halmazokat) kell figyelembe venni.

Például: „ $A \cap B \cap \overline{C}$ cella elemei” \equiv „azon elemek, amelyek A -nak és B -nek elemei, C -nek pedig nem” ...

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Vagyis az alaphalmaz elemszámából kivonjuk az „egyhalmazos” metszetek elemszámait, majd hozzáadjuk a „kéthalmazos” metszetek elemszámait, kivonjuk a „háromhalmazos” metszetek elemszámait, és így tovább, végül vesszük az összes halmaz („ n -halmazos”) metszetének elemszámát a megfelelő előjellel.

$$\text{„} \binom{n}{0} \text{ tag”} - \text{„} \binom{n}{1} \text{ tag”} + \text{„} \binom{n}{2} \text{ tag”} - \dots \pm \text{„} \binom{n}{n} \text{ tag”}$$

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Tehát az összes lehetséges módon összemetszünk valahány A_i halmazt (a 0-tagú metszetnek az Ω felel meg), és a jobb oldalon az ilyen metszetek elemszámai jelennek meg: + előjellel, ha páros sok halmazt metszettünk össze, - előjellel, ha páratlan sokat:

Tétel. Tetszőleges $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \dots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Tehát az összes lehetséges módon összemetszünk valahány A_i halmazt (a 0-tagú metszetnek az Ω felel meg), és a jobb oldalon az ilyen metszetek elemszámai jelennek meg: + előjellel, ha páros sok halmazt metszettünk össze, - előjellel, ha páratlan sokat:

Tétel (tömör alak). Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Megjegyezzük, hogy a fenti formulában $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \Omega$ értendő.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

1. típus:

Ha $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$, akkor x -et csak az $|\Omega|$ tag számolja meg (+1 előjellel), és így összességében 1-szer számoljuk meg. ✓

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

1. típus:

Ha $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$, akkor x -et csak az $|\Omega|$ tag számolja meg (+1 előjellel), és így összességében 1-szer számoljuk meg. ✓

Hiszen ha $x \in \overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$, azaz ha x egyik A_i halmaznak sem eleme, akkor természetesen nem eleme egyik $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}$ alakú metszetnek sem ($m \geq 1$). Tehát az $|\Omega|$ tagon kívül más valóban nem számolja meg x -et.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

1. Ha a metszet minden tagját az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok közül választjuk, akkor a metszetnek eleme lesz x , hiszen mindegyik kiválasztott halmaznak is eleme. ($I = \emptyset$ is rendben van.)

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

2. Ha a metszet tagjai között szerepel olyan A_k tag, amely nem az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok közül való (tehát $k \notin \{j_1, \dots, j_s\}$), akkor x nyilván nem lesz eleme a metszetnek, mert már A_k -nak sem az.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x -et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1) -szer, ha ez a szám pttlan.

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x -et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1) -szer, ha ez a szám pttan. Ezek a ± 1 -ek 0-vá összegződnek, mert ugyanannyiféleképpen lehet az A_{j_*} halmazok közül páros sokat összemetszeni, mint páratlan sokat. ✓ □

$$|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a jobb oldal $\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}$ elemeit 1-szer, $A_1 \cup \dots \cup A_n$ elemeit pedig 0-szor számolja meg.

2. típus:

Legyen most $x \in A_1 \cup \dots \cup A_n$ rögzített. Tfh az A_{j_1}, \dots, A_{j_s} halmazok azok, amelyek tartalmazzák x -et ($s \geq 1$), a többi A_i halmaznak pedig nem eleme x .

A lényeg az, hogy a formula jobb oldalán szereplő $\bigcap_{i \in I} A_i$ metszetek közül pontosan azoknak eleme x , amelyeknek minden tagja A_{j_1}, \dots, A_{j_s} közül kerül ki, vagyis amikor $I \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$.

A szummának csak az ezen metszetekhez tartozó tagjai számolják meg x -et: 1-szer, ha az összemetszett A_{j_*} halmazok száma páros; (-1) -szer, ha ez a szám pttan. Ezek a ± 1 -ek 0-vá összegződnek, mert a **nemüres** $\{j_1, \dots, j_s\}$ indexhalmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint pttan elemszámú. ✓ □

Tulajdonképpen a következőt igazoltuk az előző bizonyításban:

$$\begin{aligned}\vec{\chi}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} &= \vec{\chi}_\Omega - \vec{\chi}_{A_1} - \vec{\chi}_{A_2} - \dots - \vec{\chi}_{A_n} \\ &\quad + \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2)} + \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_3)} + \dots + \vec{\chi}_{(A_{n-1} \cap A_n)} \\ &\quad - \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} - \dots - \vec{\chi}_{(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n \vec{\chi}_{(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)},\end{aligned}$$

ahol $\vec{\chi}$ a karakterisztikus vektort jelöli.

Ekvivalens alak. Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Ekvivalens alak. Tetszőleges $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ halmazokra

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.
 \end{aligned}$$

Bizonyítás. $|A_1 \cup \dots \cup A_n| = |\Omega| - |\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}| = \dots$

A fenti alakhoz jutunk, ha a már bizonyított szita formula szerint kifejezzük $|\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}|$ -ot. □