Komponensek. Fák.

Kombinatorika

8. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. április 4.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{ létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

$\sim$ szimmetrikus: Ha $u \sim v$, akkor $v \sim u$, hiszen ha létezik uv-séta G-ben, akkor létezik vu-séta is (egy tetszőleges uv-séta „visszafelé" ilyen).

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Bizonyítás. $\sim$ reflexív: Minden $u \in V(G)$ csúcsra $u \sim u$, hiszen például az u csúcsból induló 0 hosszú séta egy uu-séta.

$\sim$ szimmetrikus: Ha $u \sim v$, akkor $v \sim u$, hiszen ha létezik uv-séta G-ben, akkor létezik vu-séta is (egy tetszőleges uv-séta „visszafelé" ilyen).

$\sim$ tranzitív: Ha $u \sim v$ és $v \sim w$, akkor $u \sim w$. Ugyanis ha létezik egy u-ból v-be menő S_1 séta, és létezik egy v-ből w-be menő S_2 séta G-ben, akkor az S_1 és S_2 sétákat összefűzve egy (v-n áthaladó) uw-sétát kapunk G-ben. $\square$

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

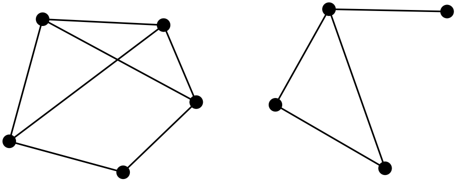
Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



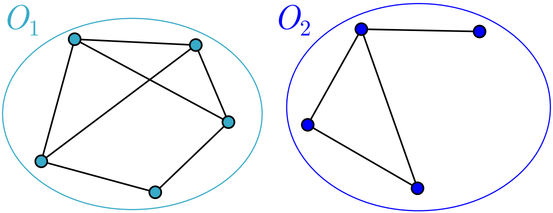
Ez egy 2 komponensből álló gráf.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{ létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség" $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



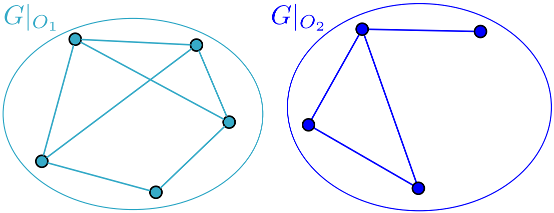
Ez egy 2 komponensből álló gráf.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség" $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



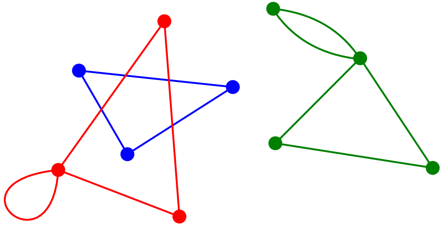
Ez egy 2 komponensből álló gráf.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség" $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



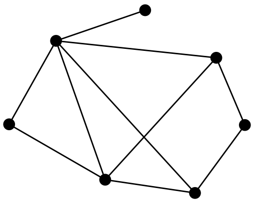
Ez egy 3 komponensből álló gráf.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség" $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \dots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \dots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



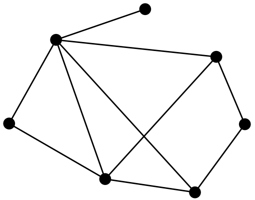
Ez egy 1 komponensből álló gráf.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség" $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



Ez egy 1 komponensből álló gráf.

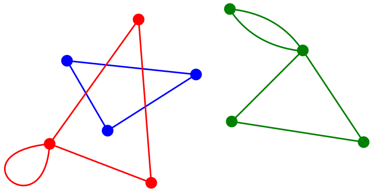
Megjegyzés. G összefüggő $\iff$ G-nek 1 komponense van.

Adott egy G gráf. A $V(G)$ csúcshalmazon definiálunk egy $\sim$ relációt:

$$u \sim v \overset{\text{def}}{\iff} \text{létezik } u\text{-ból } v\text{-be vezető séta } G\text{-ben.}$$

Állítás. Ez a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció.

Def. Egy adott G gráfra legyenek az imént definiált „elérhetőség” $\sim$ ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályai $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Ekkor a $G|_{O_1}, G|_{O_2}, \ldots, G|_{O_k}$ feszített gráfokat nevezzük a G gráf komponenseinek.



Megj. A komponens definíciója szerint egy v csúcs pontosan azon csúcsokkal van egy komponensben, amelyek elérhetők v-ből sétával. Ezen komponens élei pedig az így megtalált csúcsok között haladó G-beli élek (az összes).

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Biz. **1.** Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Biz. 1. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

2. Két különböző komponens között nem haladhat él, hiszen egy ilyen él két végpontja nyilván $\sim$-relációban állna (az él egy 1-hosszú utat biztosít közöttük), ami ellentmondana annak, hogy különböző komponensben vannak. $\square$

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Biz. 1. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

2. Két különböző komponens között nem haladhat él, hiszen egy ilyen él két végpontja nyilván $\sim$-relációban állna (az él egy 1-hosszú utat biztosít közöttük), ami ellentmondana annak, hogy különböző komponensben vannak. $\square$

Köv. Minden gráf előáll összefüggő gráfok csúcsdiszjunkt uniójaként.

Állítás. Tetszőleges G gráf esetén G komponensei összefüggő gráfok, és két különböző komponens között nem halad él.

Biz. 1. Legyen C egy tetszőleges komponense G-nek. Tetszőleges $u, v \in V(C)$ csúcsok esetén $u \sim v$ miatt létezik uv-út G-ben, legyen egy ilyen út P. A lényeg az, hogy P belső pontjai is C-ben vannak (és mivel a komponens egy feszített részgráf, így P élei is, vagyis az egész út), hiszen egy tetszőleges $x \in V(P)$ belső pont esetén a P út u és x közötti része bizonyítja, hogy $u \sim x$.

2. Két különböző komponens között nem haladhat él, hiszen egy ilyen él két végpontja nyilván $\sim$-relációban állna (az él egy 1-hosszú utat biztosít közöttük), ami ellentmondana annak, hogy különböző komponensben vannak. $\square$

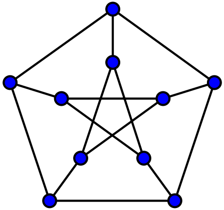
Köv. Minden gráf előáll összefüggő gráfok csúcsdiszjunkt uniójaként.

Megjegyzés. Ha a G gráf a $G_1, \ldots, G_k$ összefüggő gráfok csúcsdiszjunkt uniója, akkor G komponensei éppen a $G_1, \ldots, G_k$ gráfok.

Állítás. Ha egy gráfban (valamely $k \geq 1$ számra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k + 1$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-kör.

Állítás. Ha egy gráfban (valamely $k \geq 1$ számra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+1$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-kör.

Megjegyzés. Ez NEM akkor és csak akkor állítás: Például a Petersen-gráfban nincs Hamilton-kör, még sincs benne olyan ponthalmaz, amely rendelkezne az állításbeli tulajdonsággal.



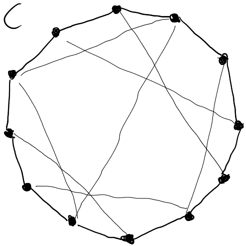
Állítás. Ha egy gráfban (valamely $k \geq 1$ számra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+1$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-kör.

Bizonyítás (indirekt/kontrapozíció). Belátjuk, hogy ha a G gráf tartalmaz egy C Hamilton-kört, akkor tetszőleges k pont elhagyása után a kapott G' gráfnak legfeljebb k komponense lesz.

Állítás. Ha egy gráfban (valamely $k \geq 1$ számra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+1$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-kör.

Bizonyítás (indirekt/kontrapozíció). Belátjuk, hogy ha a G gráf tartalmaz egy C Hamilton-kört, akkor tetszőleges k pont elhagyása után a kapott G' gráfnak legfeljebb k komponense lesz.

A k pont elhagyása után a C Hamilton-kör legfeljebb k „körívre" (útra) esik szét (ha C-n szomszédos pontokat is hagytunk el, akkor kevesebbre). Ezek a körívek tartalmazzák G' összes csúcsát. G'-nek legfeljebb annyi komponense van, ahány körívre bomlott C, hiszen minden $\sim$-ekvivalencia-osztály bizonyos körívek ponthalmazának uniója. Ez a szám pedig legfeljebb k. □

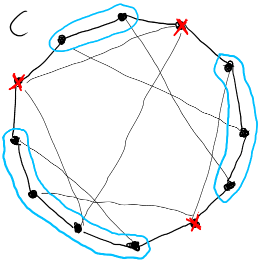


(G = C + húrok)

Állítás. Ha egy gráfban (valamely $k \geq 1$ számra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+1$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-kör.

Bizonyítás (indirekt/kontrapozíció). Belátjuk, hogy ha a G gráf tartalmaz egy C Hamilton-kört, akkor tetszőleges k pont elhagyása után a kapott G' gráfnak legfeljebb k komponense lesz.

A k pont elhagyása után a C Hamilton-kör legfeljebb k „körívre" (útra) esik szét (ha C-n szomszédos pontokat is hagytunk el, akkor kevesebbre). Ezek a körívek tartalmazzák G' összes csúcsát. G'-nek legfeljebb annyi komponense van, ahány körívre bomlott C, hiszen minden $\sim$-ekvivalencia-osztály bizonyos körívek ponthalmazának uniója. Ez a szám pedig legfeljebb k. $\square$

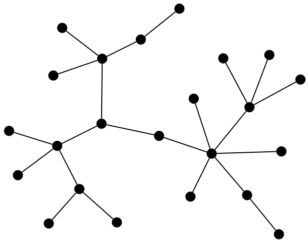


Állítás. Ha egy gráfban (valamely k-ra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+2$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-út.

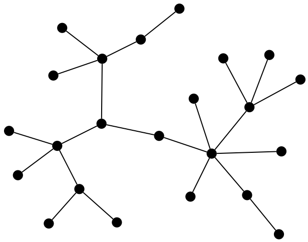
Állítás. Ha egy gráfban (valamely k-ra) található k olyan pont, amelyet elhagyva a gráf legalább $k+2$ komponensre esik szét, akkor az eredeti gráfban nincs Hamilton-út.

Bizonyítás. Az előző állításhoz hasonlóan bizonyítható; annyi módosítással, hogy ha egy Hamilton-útból hagyunk el k pontot, akkor az legfeljebb $k+1$ „útszakaszra" (útra) esik szét . . . $\square$

Definíció. Egy G gráf fa, ha G összefüggő és körmentes.

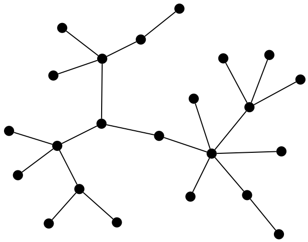


Definíció. Egy G gráf fa, ha G összefüggő és körmentes.



Megjegyzés. A definícióból következik, hogy minden fa egyszerű gráf (egy hurokél 1 hosszú kört, két párhuzamos él pedig 2 hosszú kört alkotna).

Definíció. Egy G gráf fa, ha G összefüggő és körmentes.



Tétel. A következők ekvivalensek:

a) A G gráf összefüggő és körmentes (azaz fa).

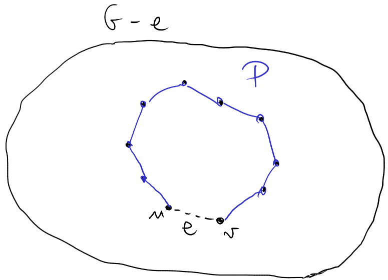
b) G minimális összefüggő gráf: vagyis G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az.

c) G maximális körmentes gráf: vagyis G körmentes, de bármely új élt behúzva már kör alakul ki.

Bizonyítás. Csak az a) és b) pontok ekvivalenciáját igazoljuk: „G összefüggő és körmentes” $\iff$ „G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az”.

Bizonyítás. Csak az a) és b) pontok ekvivalenciáját igazoljuk: „G összefüggő és körmentes” $\iff$ „G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az”.

$\implies$ **irány:** Tfh. G összefüggő és körmentes. Csak azt kell igazolnunk, hogy tetszőleges $e \in E(G)$ esetén $G - e$ már nem összefüggő. G körmentessége miatt e nem hurokél, legyen a két végpontja u és v. Ha $G - e$ összefüggő lenne, akkor lenne benne út u és v között. Egy ilyen út e-vel együtt egy kört adna G-ben, ami nem lehetséges (hiszen G körmentes).



Bizonyítás. Csak az a) és b) pontok ekvivalenciáját igazoljuk: „G összefüggő és körmentes” $\Longleftrightarrow$ „G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az”.

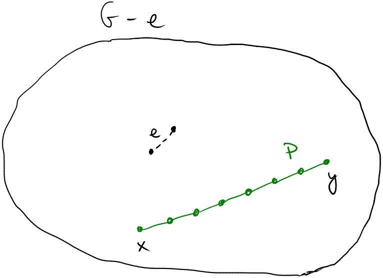
$\Longleftarrow$ **irány:** Tfh. G összefüggő, és bármely élét elhagyva már nem az. Csak azt kell belátnunk, hogy G körmentes. Indirekt tfh G-ben van egy C kör. Ekkor C tetszőleges e élét választva a $G - e$ gráf összefüggő (ami ellentmondás): Legyen x és y két tetszőleges csúcs $(G - e)$-ben. Belátjuk, hogy van közöttük séta $(G - e)$-ben:

Bizonyítás. Csak az a) és b) pontok ekvivalenciáját igazoljuk: „G összefüggő és körmentes” $\iff$ „G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az”.

$\Longleftarrow$ **irány:** Tfh. G összefüggő, és bármely élét elhagyva már nem az. Csak azt kell belátnunk, hogy G körmentes. Indirekt tfh G-ben van egy C kör. Ekkor C tetszőleges e élét választva a $G - e$ gráf összefüggő (ami ellentmondás): Legyen x és y két tetszőleges csúcs $(G - e)$-ben. Belátjuk, hogy van közöttük séta $(G - e)$-ben:

G összefüggősége miatt létezik egy P út x és y között.

- Ha ez az út nem tartalmazza az e élt, akkor ez a P út $(G-e)$-ben is megmarad.

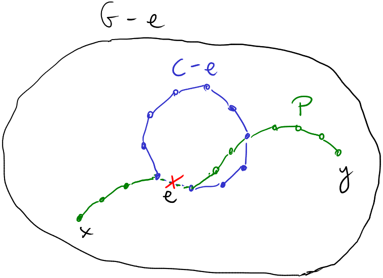


Bizonyítás. Csak az a) és b) pontok ekvivalenciáját igazoljuk: „G összefüggő és körmentes” $\Longleftrightarrow$ „G összefüggő, de bármely élét elhagyva már nem az”.

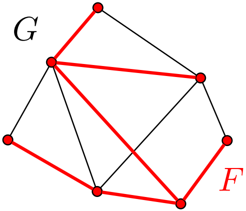
$\Longleftarrow$ **irány:** Tfh. G összefüggő, és bármely élét elhagyva már nem az. Csak azt kell belátnunk, hogy G körmentes. Indirekt tfh G-ben van egy C kör. Ekkor C tetszőleges e élét választva a $G - e$ gráf összefüggő (ami ellentmondás): Legyen x és y két tetszőleges csúcs $(G - e)$-ben. Belátjuk, hogy van közöttük séta $(G - e)$-ben:

G összefüggősége miatt létezik egy P út x és y között.

- Ha ez az út nem tartalmazza az e élt, akkor ez a P út $(G-e)$-ben is megmarad.
- Ha ez az út tartalmazza az e élt, akkor P-ben az e élt lecserélve a $C-e$ útra, egy SÉTÁT kapunk x és y között $(G-e)$-ben. $\square$



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

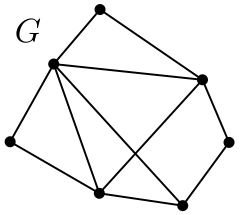
Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.

Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

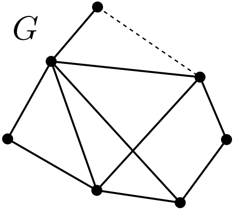
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

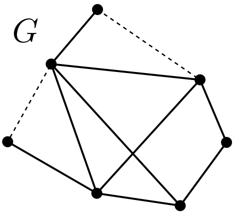
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

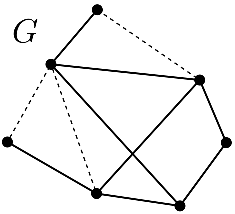
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

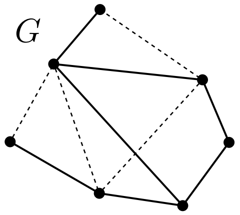
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

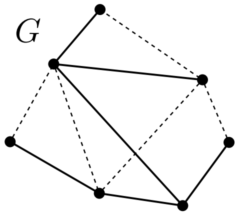
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

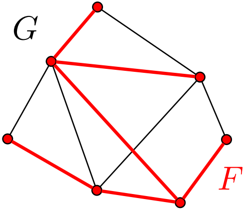
Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.



Definíció. A G gráf feszítőfáján egy olyan részgráfot értünk, amely fa és tartalmazza G összes csúcsát (azaz feszítő részgráf).

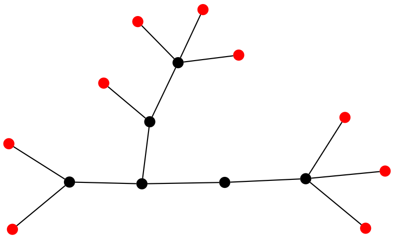
Tétel. Minden összefüggő gráfnak van feszítőfája.

Bizonyítás. Legyen G egy összefüggő gráf. Ha G-ben van olyan él, amelyet elhagyva a kapott gráf még mindig összefüggő, akkor hagyjunk el EGY ilyen élt. Ismételgessük ezt az eljárást az élelhagyás után kapott gráfra mindaddig, amíg egy olyan gráfhoz nem jutunk, amelyben már nincs ilyen tulajdonságú él.

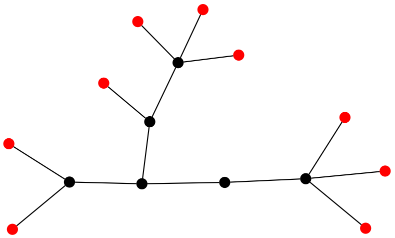


Ez az elakadáskori F gráf az előző tétel szerint fa, hiszen rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy összefüggő (az összefüggőséget mindvégig megőriztük), de bármely élét elhagyva már nem az (hiszen elakadtunk). F feszítő részgráfja G-nek, hiszen csak éleket hagytunk el G-ből. Tehát F feszítőfája G-nek. $\square$

Definíció. Egy fa 1 fokú csúcsait a fa leveleinek nevezzük.



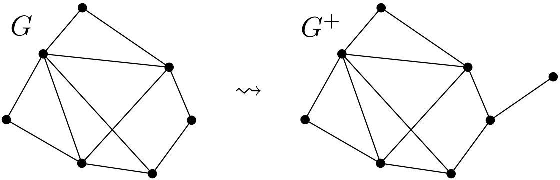
Definíció. Egy fa 1 fokú csúcsait a fa leveleinek nevezzük.



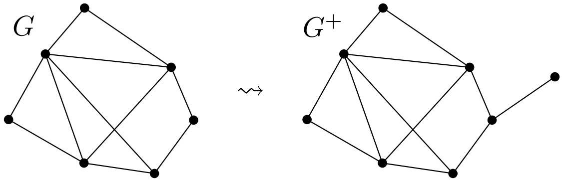
Állítás. Minden legalább 2 pontú fának van levele (legalább 2 db).

Bizonyítás. Lásd gyakorlat.

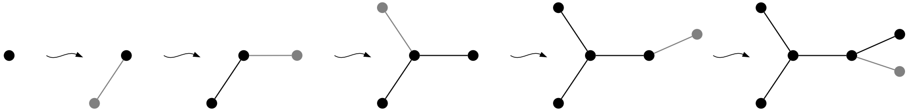
Definíció. Adott egy G gráf. Ághajtás operáció alatt a következő eljárást értjük: Felveszünk egy új csúcsot, és azt összekötjük G pontosan egy csúcsával.



Definíció. Adott egy G gráf. Ághajtás operáció alatt a következő eljárást értjük: Felveszünk egy új csúcsot, és azt összekötjük G pontosan egy csúcsával.



Tétel. A G gráf pontosan akkor fa, ha G felépíthető egy csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.



Tétel. G fa $\iff$ G felépíthető egy csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

A bizonyítás a következő két lemmán múlik (ld. gyakorlat):

1. Lemma. Ha egy fán hajtjuk végre az ághajtás operációt, akkor a kapott gráf is fa lesz.

2. Lemma. Ha egy fának töröljük egy levelét, akkor a kapott gráf is fa lesz.

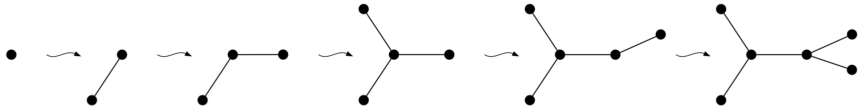
Tétel. G fa $\iff$ G felépíthető egy csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

A bizonyítás a következő két lemmán múlik (ld. gyakorlat):

1. Lemma. Ha egy fán hajtjuk végre az ághajtás operációt, akkor a kapott gráf is fa lesz.

2. Lemma. Ha egy fának töröljük egy levelét, akkor a kapott gráf is fa lesz.

Az 1. lemmából következik, hogy az egy csúcsból ághajtásokkal felépíthető gráfok valóban fák: Az egy pontú (él nélküli) gráf fa, és minden ághajtás operáció megőrzi a fa tulajdonságot. Így a felépítés végén kapott gráf is fa.



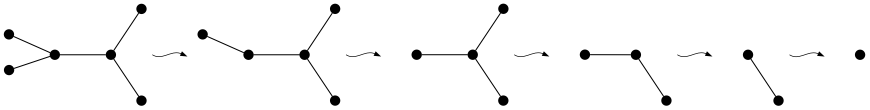
Tétel. G fa $\iff$ G felépíthető egy csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

A bizonyítás a következő két lemmán múlik (ld. gyakorlat):

1. Lemma. Ha egy fán hajtjuk végre az ághajtás operációt, akkor a kapott gráf is fa lesz.

2. Lemma. Ha egy fának töröljük egy levelét, akkor a kapott gráf is fa lesz.

A 2. lemmából pedig az következik, hogy tetszőleges T fa felépíthető ághajtásokkal: Hagyjuk el a T egy levelét, így ismét egy fát kapunk. Annak is hagyjuk el a levelét, és így tovább, míg az 1 pontú (0 élű) fához nem jutunk. (Amíg legalább 2 pontú az aktuális fa, addig van levele.) Ezt a levéltörlési eljárást „visszafelé” lejátszva megkapjuk a T ághajtásokkal történő felépítését. $\square$



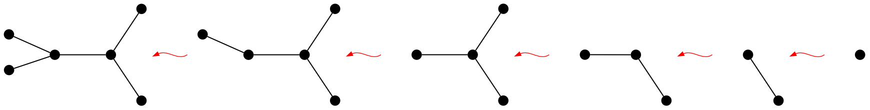
Tétel. G fa $\iff$ G felépíthető egy csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

A bizonyítás a következő két lemmán múlik (ld. gyakorlat):

1. Lemma. Ha egy fán hajtjuk végre az ághajtás operációt, akkor a kapott gráf is fa lesz.

2. Lemma. Ha egy fának töröljük egy levelét, akkor a kapott gráf is fa lesz.

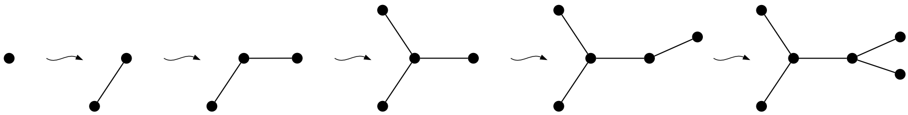
A 2. lemmából pedig az következik, hogy tetszőleges T fa felépíthető ághajtásokkal: Hagyjuk el a T egy levelét, így ismét egy fát kapunk. Annak is hagyjuk el a levelét, és így tovább, míg az 1 pontú (0 élű) fához nem jutunk. (Amíg legalább 2 pontú az aktuális fa, addig van levele.) Ezt a levéltörlési eljárást „visszafelé” lejátszva megkapjuk a T ághajtásokkal történő felépítését. $\square$



Tétel. Egy n pontú fának $n-1$ éle van.

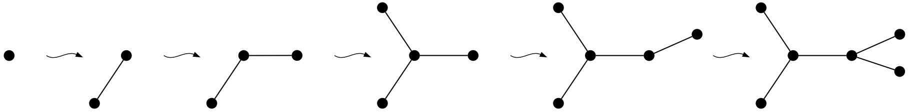
Tétel. Egy n pontú fának $n-1$ éle van.

Bizonyítás. Legyen T egy n pontú fa. Építsük fel T-t ághajtásokkal. A kiinduló lépésben 1 csúcsunk van. Mivel minden egyes ághajtás operáció 1-gyel növeli a csúcsok számát, ezért biztos, hogy $n-1$ darab ághajtás operációt hajtottunk végre. Minden egyes ághajtás operáció 1-gyel növelte az élek számát (ami kezdetben 0 volt), ezért T-nek $n-1$ éle van. $\square$



Tétel. Egy n pontú fának $n-1$ éle van.

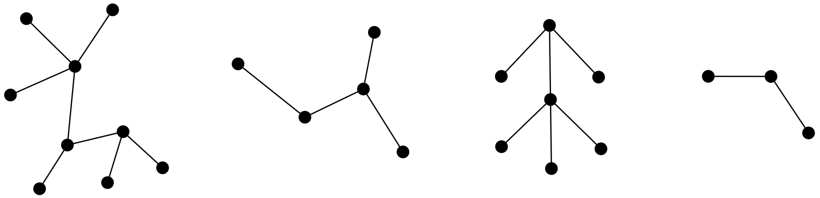
Bizonyítás. Legyen T egy n pontú fa. Építsük fel T-t ághajtásokkal. A kiinduló lépésben 1 csúcsunk van. Mivel minden egyes ághajtás operáció 1-gyel növeli a csúcsok számát, ezért biztos, hogy $n-1$ darab ághajtás operációt hajtottunk végre. Minden egyes ághajtás operáció 1-gyel növelte az élek számát (ami kezdetben 0 volt), ezért T-nek $n-1$ éle van. $\square$



Következmény. Minden n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

Bizonyítás. Tekintsünk az n pontú G összefüggő gráfban egy F feszítőfát. F élei már adnak $n-1$ élt G-ben az előző tétel szerint. $\square$

Hogy néznek ki a körmentes gráfok? Egy körmentes gráf minden komponense összefüggő (definíció szerint) és nyilván körmentes is (hiszen az egész gráfban nincs kör). Tehát egy körmentes gráf komponensei FÁK. Másképp fogalmazva, minden körmentes gráf fák csúcsdiszjunkt úniója. Ezért a körmentes gráfokat erdőknek is nevezik.



Hogy néznek ki a körmentes gráfok? Egy körmentes gráf minden komponense összefüggő (definíció szerint) és nyilván körmentes is (hiszen az egész gráfban nincs kör). Tehát egy körmentes gráf komponensei FÁK. Másképp fogalmazva, minden körmentes gráf fák csúcsdiszjunkt úniója. Ezért a körmentes gráfokat erdőknek is nevezik.

Állítás. Egy n pontú G körmentes gráfnak (erdőnek) $n-k$ éle van, ahol k a G komponenseinek száma.

Biz. Legyenek a komponensek pontszámai $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Tudjuk, hogy minden komponens egy fa, így a komponensek élszámai rendre $n_1-1, n_2-1, \ldots, n_k-1$. Tehát G-nek összesen $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)=n-k$ éle van. □

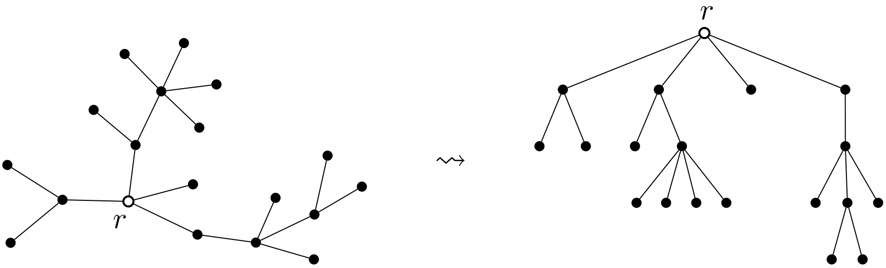
Hogy néznek ki a körmentes gráfok? Egy körmentes gráf minden komponense összefüggő (definíció szerint) és nyilván körmentes is (hiszen az egész gráfban nincs kör). Tehát egy körmentes gráf komponensei FÁK. Másképp fogalmazva, minden körmentes gráf fák csúcsdiszjunkt úniója. Ezért a körmentes gráfokat erdőknek is nevezik.

Állítás. Egy n pontú G körmentes gráfnak (erdőnek) $n-k$ éle van, ahol k a G komponenseinek száma.

Biz. Legyenek a komponensek pontszámai $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Tudjuk, hogy minden komponens egy fa, így a komponensek élszámai rendre $n_1-1, n_2-1, \ldots, n_k-1$. Tehát G-nek összesen $(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)=n-k$ éle van. □

Köv. Egy n pontú körmentes gráfnak legfeljebb $n-1$ éle van. Másszóval, ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráf tartalmaz kört.

Minden fa lerajzolható „családfaszerűen”:



A részletekért lásd a Gyökeres fák és lerajzolásaik segédanyagot a honlapon.