Gráfelméleti alapok

Kombinatorika

6. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. március 14.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf csúcshalmazának (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf élhalmazának (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Emlékeztetünk, hogy $\binom{V}{2}$ a V kételemű részhalmazainak halmazát jelöli.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf csúcshalmazának (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf élhalmazának (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

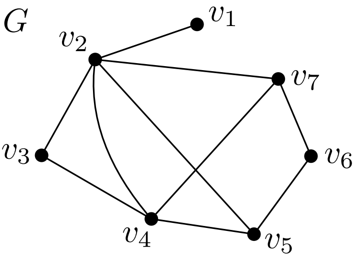
$E = \Big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}\Big\}$.

Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf csúcshalmazának (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf élhalmazának (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.

Példa. $G = (V, E)$, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, és

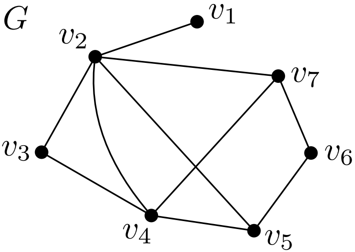
$$E = \Big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_7\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}\Big\}.$$

A példa szemléltetése.



Egyszerű gráf informálisan:
Véges sok csúcs (pont), bizonyos csúcspárok egy éllel összekötve.

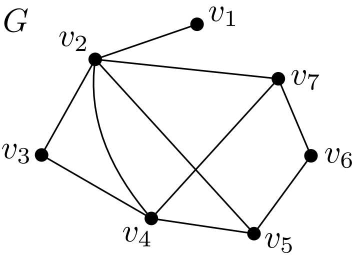
Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$.
A V halmazt a gráf csúcshalmazának (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf élhalmazának (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



Jelölések. • Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a G gráf csúcshalmazáról, illetve élhalmazáról van szó, akkor $V(G)$-t, illetve $E(G)$-t írunk.

- Tehát $|V(G)|$ a G gráf csúcsszáma, $|E(G)|$ pedig az élszáma.
- Az $\{u, v\}$ élt (kételemű halmazt) az olvashatóság kedvéért uv alakban írjuk.

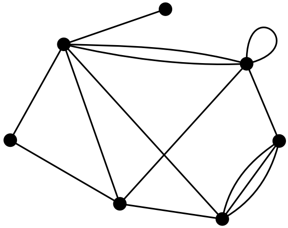
Egyszerű gráfon egy (V, E) párt értünk, ahol V egy véges halmaz, és $E \subseteq \binom{V}{2}$. A V halmazt a gráf csúcshalmazának (V elemeit pedig csúcsoknak/pontoknak), az E halmazt a gráf élhalmazának (E elemeit pedig éleknek) nevezzük.



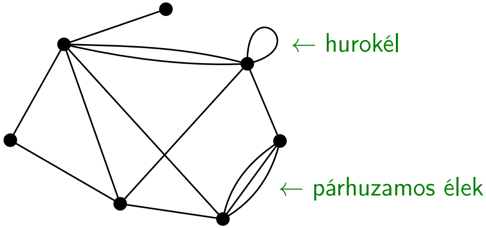
Konvenciók. • $uv \in E(G)$ esetén azt mondjuk, hogy „az u és v csúcsok összekötöttek / szomszédosak G-ben".

• Élünk a gráf szemléletes jelentéséből adódó szóhasználattal: „az uv él két végpontja u és v", „az $e = uv$ él illeszkedik az u csúcsra" stb.

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V-beli csúcsra illeszkedik.

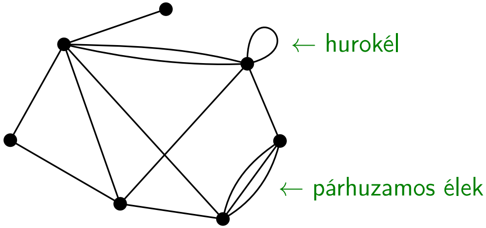


(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V-beli csúcsra illeszkedik.



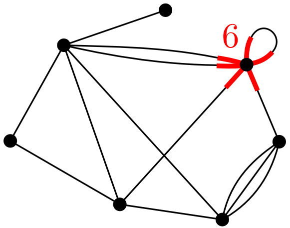
Általános gráfok esetén megengedett, hogy egy élnek egybeessen a két végpontja (az ilyen éleket hurokéleknek nevezzük), illetve két pont között egynél több él is haladhat (ez esetben ezen éleket párhuzamos éleknek vagy többszörös élnek nevezzük).

(Általános) gráfon egy olyan (V, E, I) hármast értünk, ahol V és E véges halmazok (a csúcshalmaz és az élhalmaz), az $I \subseteq V \times E$ pedig egy olyan illeszkedési reláció V és E között, hogy minden $e \in E$ él pontosan 1 vagy 2 V-beli csúcsra illeszkedik.



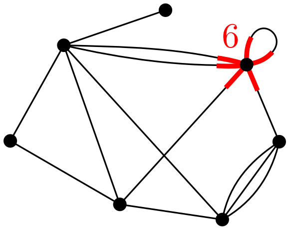
Megjegyzés. Az egyszerű gráfok tekinthetők általános gráfoknak is. (A szemléletes kép alapján ez nyilvánvaló. Formálisan, a (V, E) egyszerű gráfra tekinthetünk (V, E, I) gráfként, ahol az I illeszkedési reláció úgy van definiálva, hogy az $\{u, v\}$ él pontosan az u és v csúcsokra illeszkedik.) Egy gráf pontosan akkor egyszerű gráf, ha nem tartalmaz sem hurokélt, sem párhuzamos éleket.

Fokszám.



Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek" száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

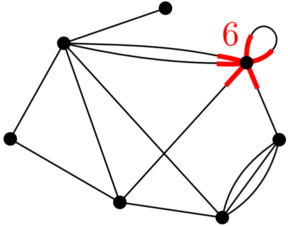
Fokszám.



Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

$$d(v) = (v\text{-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (v\text{-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Fokszám.

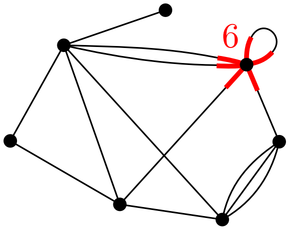


Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek'' száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

$$d(v) = (v\text{-re illeszkedő nemhurok élek száma}) + 2 \cdot (v\text{-re illeszkedő hurokélek száma}).$$

Megjegyzés. Egyszerű gráf esetén a v csúcs fokszáma a v szomszédainak száma.

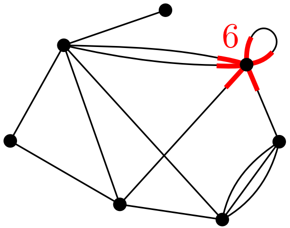
Fokszám.



Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf reguláris. Ha ez a közös fokszám d, és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor d-reguláris gráfról beszélünk.

Fokszám.



Egy csúcs fokszáma a csúcsból induló élek száma, ahol minden hurokélt kétszer számolunk. (A fokszám tehát a csúcsból induló „élvégek” száma.) Egy v csúcs fokszámát $d(v)$-vel jelöljük.

Definíció. Ha egy gráfban minden csúcs fokszáma ugyanannyi, akkor azt mondjuk, hogy a gráf reguláris. Ha ez a közös fokszám d, és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor d-reguláris gráfról beszélünk.

Definíció. Egy gráf 0 fokú csúcsait izolált csúcsoknak nevezzük. •

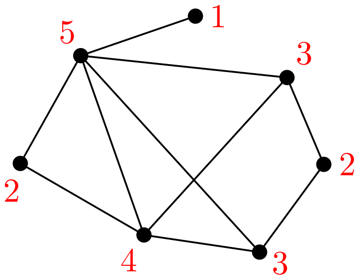
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

A gráfelmélet jelöléseinek gyakorlása kedvéért ugyanez formálisabban:

Tetszőleges G gráf esetén

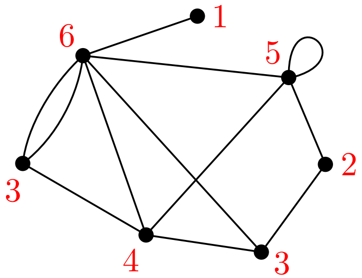
$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot |E(G)| \, .$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



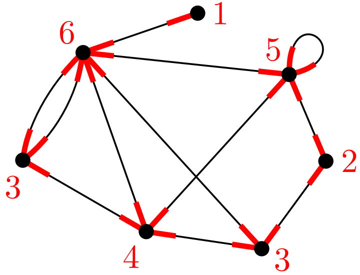
$$1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 10$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.

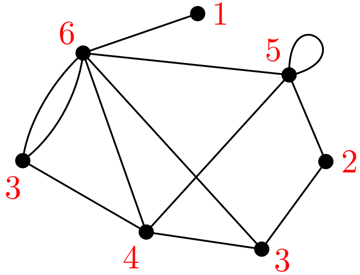


$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 2 \cdot 12$$

Bizonyítás. A fokszámösszeg is, és az élszám kétszerese is a gráfban található élvégeket számolja össze. (A fokszámösszeg csúcsonként csoportosítva számol; az élszámösszeg kétszerese pedig abból jön, hogy minden élnek két vége van.)

$\square$

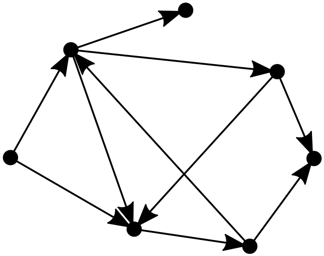
Fokszámtétel. Tetszőleges gráfban a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszeresével egyenlő.



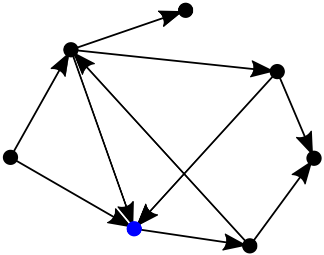
Következmény. Tetszőleges gráfban a fokszámok összege páros.

Másszóval. Tetszőleges gráfban páros sok páratlan fokszámú csúcs van.

Irányított gráf.

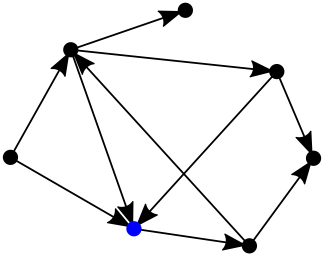


Az irányított gráfokban minden élnek van egy iránya. (Minden él az egyik végpontjából a másik felé mutat.) Informálisan, irányított gráfot úgy kapunk, hogy felveszünk egy irányítatlan (= „hagyományos") gráfot, és minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A precíz definíciót mellőzzük, az érdeklődő hallgató elolvashatja a fogalomtárban.)



Irányított gráfban egy csúcs kifoka a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs befoka pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

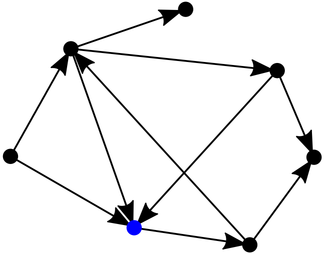
Például a fenti gráfban a kékkel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.



Irányított gráfban egy csúcs kifoka a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs befoka pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

Például a fenti gráfban a kékkel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

Példa. A permutációk diagramja (ld. 3-4. előadás) egy olyan irányított gráf, amelyben minden csúcsnak 1 a befoka és a kifoka is.

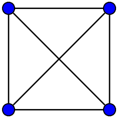


Irányított gráfban egy csúcs kifoka a csúcsból kiinduló (kifelé mutató) élek száma; egy csúcs befoka pedig a csúcsba befutó (befelé mutató) élek száma.

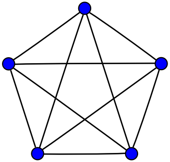
Például a fenti gráfban a kékkel jelölt csúcs befoka 3, a kifoka 1.

Tétel + Biz. Tetszőleges irányított gráfban a csúcsok kifokainak összege megegyezik a csúcsok befokainak összegével. Mindkét mennyiség az élek számával egyenlő.

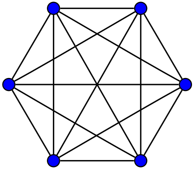
A teljes gráf olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n-nel jelöljük.



K_4

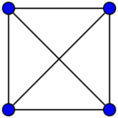


K_5

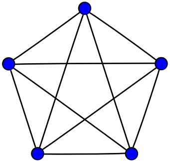


K_6

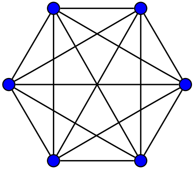
A teljes gráf olyan egyszerű gráf, amelyben bármely két különböző csúcs összekötött. Az n pontú teljes gráfo(ka)t K_n-nel jelöljük.



K_4



K_5



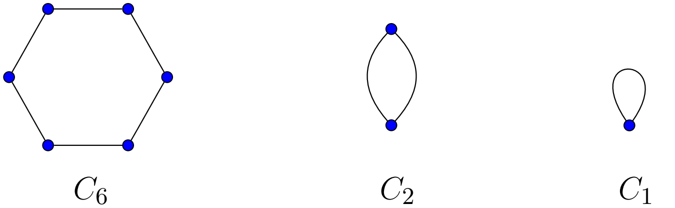
K_6

Az út-gráf olyan egyszerű gráf, amely megkapható úgy, hogy felveszünk egymás mellett néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze éllel, ha szomszédosak az ábrán. Az n élű út-gráfo(ka)t P_n-nel jelöljük.

P_6

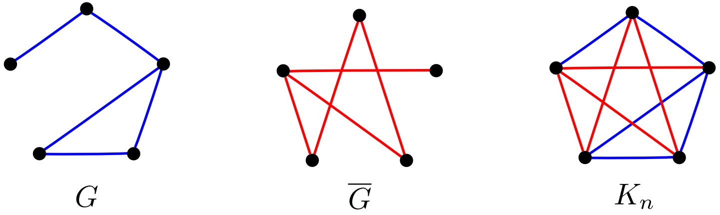
Formálisan: $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$, $E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_nv_{n+1}\}$.

A kör-gráf olyan gráf, amely megkapható úgy, hogy körszerűen felveszünk néhány csúcsot, és két csúcsot pontosan akkor kötünk össze a gráfban, ha szomszédosak a körön. Az n pontú kör gráfo(ka)t C_n-nel jelöljük.



Fontos kiegészítés, hogy C_1-et és C_2-t az ábrán látható módon definiáljuk (így ezek nem egyszerű gráfok; míg a nagyobb pontszámú kör-gráfok egyszerűek).

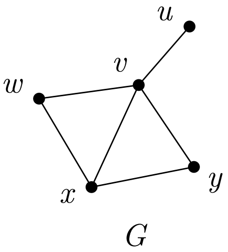
A G egyszerű gráf komplementere az a $\overline{G}$-sal jelölt egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, és két csúcs pontosan akkor összekötött $\overline{G}$-ben, ha azok nem összekötöttek G-ben.



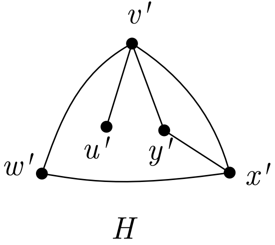
Tehát ha G egy n pontú gráf, akkor $\overline{G}$-t úgy kapjuk, hogy az n pontú teljes gráfból töröljük G éleit.

Def. A G és H egyszerű gráfok izomorfak, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban".



$\simeq$



$$\phi\colon \quad u \mapsto u',\ \ v \mapsto v',\ \ w \mapsto w',\ \ x \mapsto x',\ \ y \mapsto y'.$$

Def. A G és H egyszerű gráfok izomorfak, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekciókat gráfizomorfizmusoknak nevezzük.

Def. A G és H egyszerű gráfok izomorfak, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban”.

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekciókat gráfizomorfizmusoknak nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfhalmazon.

Def. A G és H egyszerű gráfok izomorfak, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban".

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekciókat gráfizomorfizmusoknak nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfhalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n, C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

Def. A G és H egyszerű gráfok izomorfak, ha létezik olyan $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekció, hogy bármely két $u, v \in V(G)$ csúcsra u és v akkor és csak akkor összekötött G-ben, ha $\phi(u)$ és $\phi(v)$ összekötött H-ban. Jelölése: $G \simeq H$.

Informálisan, két gráf akkor izomorf, ha „tulajdonképpen megegyeznek, csak máshogy nevezzük a csúcsokat az egyikben, mint a másikban".

Def. $G \simeq H$ esetén a fenti definícióban előírt tulajdonságú $\phi\colon V(G) \to V(H)$ bijekciókat gráfizomorfizmusoknak nevezzük.

Állítás. A $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció tetszőleges gráfhalmazon.

Megjegyzés. A korábbi diákon szereplő K_n, C_n és P_n gráfok csak izomorfia erejéig meghatározottak.

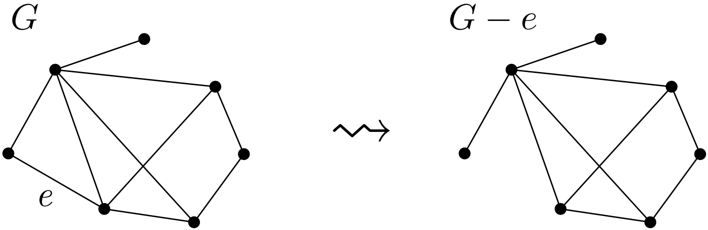
Megjegyzés. Általános gráfok izomorfiája ezek után értelemszerűen definiálható (a fenti világoskék magyarázatot formalizálva); ez az érdeklődő hallgatók számára egyszerű gyakorló feladat.

Azon, hogy a „G gráfból elhagyjuk az e élt”, azt értjük, hogy töröljük G élhalmazából az $e \in E(G)$ élt. Az így kapott gráfot $G - e$ jelöli.

Precízebben:

$$V(G-e) := V(G), \quad E(G-e) := E(G) \setminus \{e\},$$

és a G-beli illeszkedések öröklődnek.

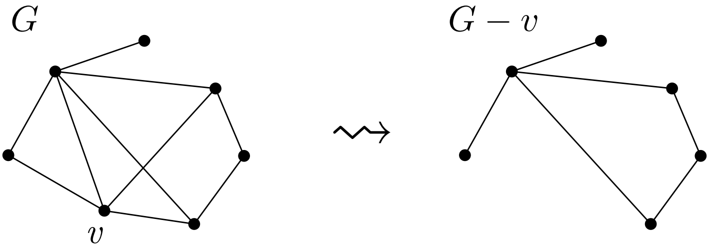


Azon, hogy a „G gráfból elhagyjuk a v csúcsot”, azt értjük, hogy töröljük G csúcshalmazából az $v \in V(G)$ csúcsot, és töröljük G élhalmazából a v-re illeszkedő éleket. Az így kapott gráfot $G - v$ jelöli.

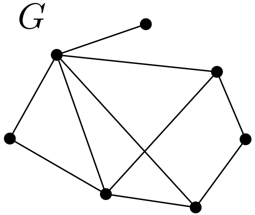
Precízebben:

$$V(G - v) := V(G) \setminus \{v\},$$
$$E(G - v) := E(G) \setminus \{e : e \text{ egy } v\text{-re illeszkedő él } G\text{-ben}\},$$

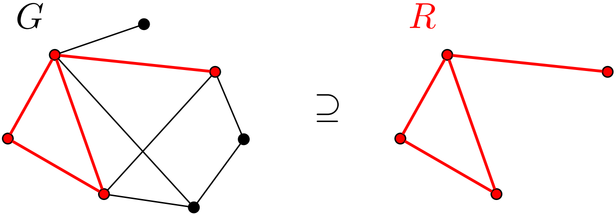
és a G-beli illeszkedések öröklődnek.



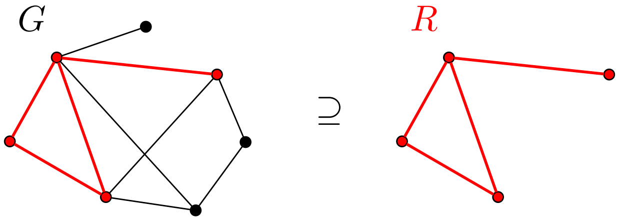
Definíció. Az R gráf részgráfja a G gráfnak, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Definíció. Az R gráf részgráfja a G gráfnak, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.

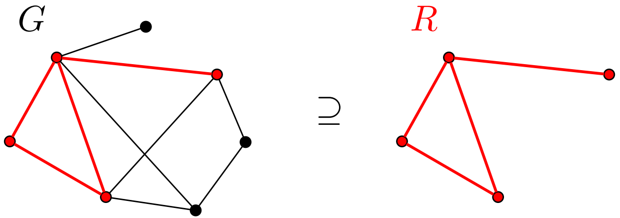


Definíció. Az R gráf részgráfja a G gráfnak, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

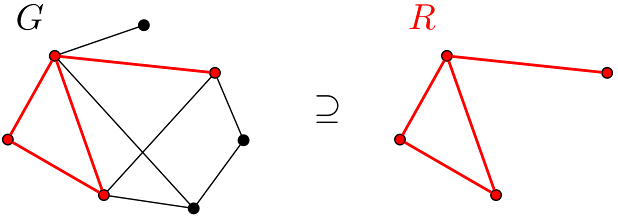
Definíció. Az R gráf részgráfja a G gráfnak, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja feszítő részgráf, ha R megkapható G-ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. Az R gráf részgráfja a G gráfnak, ha R megkapható G-ből csúcsok és élek elhagyásával. Jelölése: $R \subseteq G$.



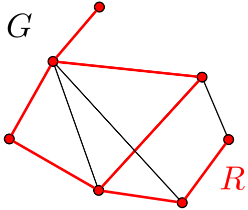
Megjegyzés. G részgráfja saját magának. (Az is megengedett, hogy nem hagyunk el semmit.)

Definíció. A G gráf R részgráfja feszítő részgráf, ha R megkapható G-ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

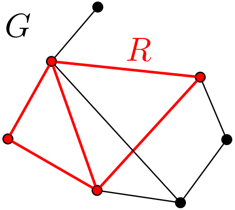
Definíció. A G gráf R részgráfja feszített részgráf, ha R megkapható G-ből csak csúcsok elhagyásával.

Definíció. A G gráf R részgráfja feszítő részgráf, ha R megkapható G-ből csak élek elhagyásával, vagyis ha R tartalmazza G összes csúcsát.

Definíció. A G gráf R részgráfja feszített részgráf, ha R megkapható G-ből csak csúcsok elhagyásával.



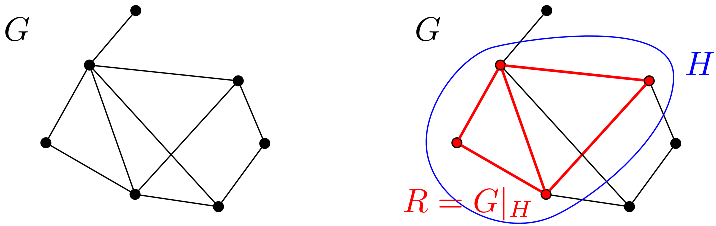
feszítő részgráf



feszített részgráf

Definíció. A G gráf R részgráfja feszített részgráf, ha R megkapható G-ből csak csúcsok elhagyásával.

Megjegyzés. Ha az $R \subseteq G$ feszített részgráfnak a csúcshalmaza $H \subseteq V(G)$ halmaz (ez a csúcselhagyások után megmaradt pontok halmaza), akkor R pontosan azon G-beli éleket tartalmazza (az összeset!), amelyek H pontjai között haladnak. Tehát a H halmaz egyértelműen meghatározza az R feszített részgráfot, ezért R-re úgy is hivatkozunk, hogy a H által feszített részgráf G-ben, és $G|_H$-val jelöljük.



Séta alatt egy olyan „mozgást'' értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S séta alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

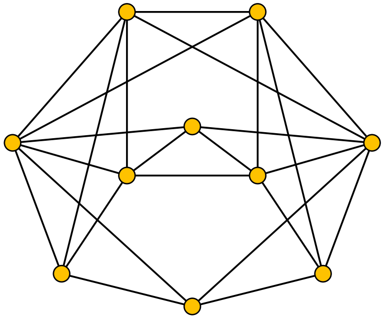
sorozatot értünk, ahol $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok G-ben, az e_i pedig olyan él G-ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i, minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

Séta alatt egy olyan „mozgást'' értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S séta alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok G-ben, az e_i pedig olyan él G-ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i, minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

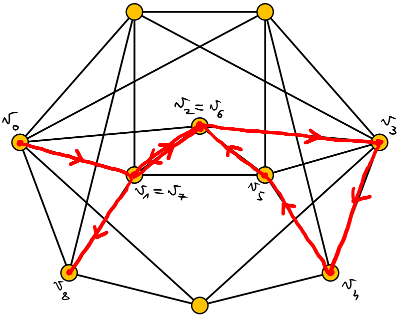


Séta alatt egy olyan „mozgást" értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S séta alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok G-ben, az e_i pedig olyan él G-ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i, minden $i = 1, \ldots, k$-ra.



Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S séta alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok G-ben, az e_i pedig olyan él G-ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i, minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

Definíció. A fenti S séta hossza tehát k, ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta hossza lehet 0 is, ez esetben a séta mint sorozat „v” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Séta alatt egy olyan „mozgást” értünk a gráfban, amely során minden lépésben az aktuális csúcsról valamely kiinduló élen átlépünk egy szomszédos csúcsba.

Precíz definíció. A G gráfban egy (k hosszú) S séta alatt egy

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$$

sorozatot értünk, ahol $v_1, \ldots, v_k$ csúcsok G-ben, az e_i pedig olyan él G-ben, amelynek két végpontja v_{i-1} és v_i, minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

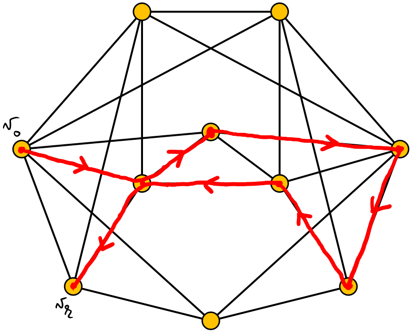
Definíció. A fenti S séta hossza tehát k, ahol k a sorozatban szereplő élek száma (a multiplicitások figyelembevételével). A séta hossza lehet 0 is, ez esetben a séta mint sorozat „v” alakú (egy helyben állunk a v csúcson).

Definíció. A v_0 pontot a séta kezdőpontjának, a v_k pontot a séta végpontjának nevezzük. Azt mondjuk, hogy a séta zárt, ha a végpont egybeesik a kezdőponttal. (Különben a séta nyílt.)

Példa. Az előző ábrán egy 8 hosszú nyílt séta volt látható.

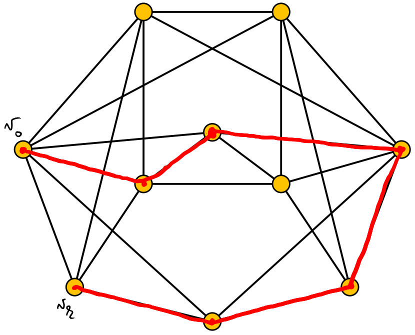
Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.



Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta út, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \ldots, v_k$ csúcsok mind különbözők.



Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta út, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \ldots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

Állítás. S út. $\Longrightarrow$ S vonal. $\Longrightarrow$ S séta.

(A fordított implikációk egyike sem igaz, ld. előző ábrák.)

Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta út, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \ldots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

Állítás. S út. $\Longrightarrow$ S vonal. $\Longrightarrow$ S séta.

Állítás. A G gráf két tetszőleges x és y csúcsára pontosan akkor létezik xy-út G-ben, ha létezik xy-séta G-ben.

Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

- Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.
- Az S séta út, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \ldots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

Állítás. S út. $\implies$ S vonal. $\implies$ S séta.

Állítás. A G gráf két tetszőleges x és y csúcsára pontosan akkor létezik xy-út G-ben, ha létezik xy-séta G-ben.

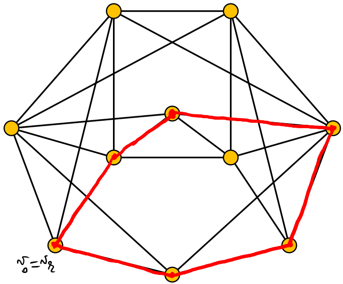
Bizonyítás. Ha létezik xy-séta G-ben, akkor tekintsünk egy S legrövidebb xy-sétát (vö. séta hossza). Ebben a sétában nem lehet csúcsismétlés, hiszen egy v csúcs két meglátogatása közötti sétaszakasz kivágásával rövidebb sétát kapnánk. Tehát S egy xy-út. (Az állítás másik iránya nyilvánvaló.) $\square$

Definíciók. Legyen S a $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta.

• Az S séta vonal, ha nincs benne élismétlés, azaz a sorozatban szereplő $e_1, \ldots, e_k$ élek mind különbözők.

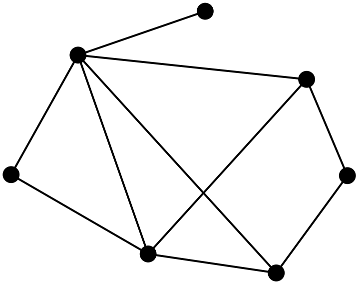
• Az S séta út, ha nincs benne csúcsismétlés, azaz a sorozatban szereplő $v_0, \ldots, v_k$ csúcsok mind különbözők.

• Az S séta kör, ha zárt, és a kezdőpont=végpont egyenlőséget leszámítva nincs benne csúcsismétlés, valamint legalább 1 éle van, és nincs benne élismétlés sem.



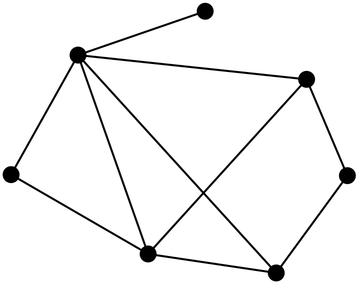
Definíció. Egy gráf összefüggő, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa összefüggő gráfra.



Definíció. Egy gráf összefüggő, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

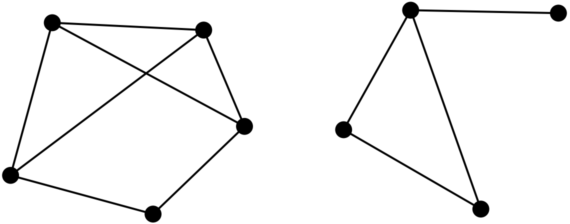
Példa összefüggő gráfra.



Könnyű meggondolni, hogy az összefüggőség igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy egy tetszőleges csúcsból el lehet jutni bármelyik másikba. (Miért?)

Definíció. Egy gráf összefüggő, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

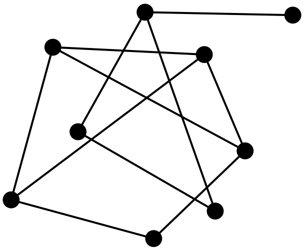
Példa NEM összefüggő gráfra.



Ez egy 9 csúcsú gráf.

Definíció. Egy gráf összefüggő, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

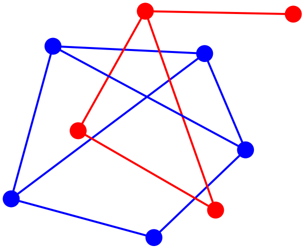
Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez ugyanaz a gráf, mint előbb.

Definíció. Egy gráf összefüggő, bármely két csúcsa között létezik út/séta, vagyis ha bármely csúcsából bármely másikba el lehet jutni a gráf élein haladva.

Példa NEM összefüggő gráfra 2.



Ez ugyanaz a gráf, mint előbb.

Köszönöm a figyelmet!