Extremális gráfelmélet, Ramsey-elmélet

Kombinatorika

12. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. május 2.

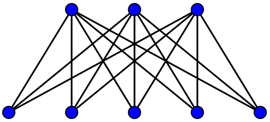
Az extremális gráfelmélet olyan kérdésekkel foglalkozik, hogy „legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha ... ?". (Az extremális gráfelmélet a magyar matematika egyik fő erőssége.)

Ebben a témakörben csak egyszerű gráfokkal foglalkozunk!

Mi bevezetésként csak azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy legfeljebb hány éle lehet egy n pontú egyszerű gráfnak, ha nem tartalmaz k pontú klikket?

Definíció. A teljes páros gráf olyan (egyszerű) páros gráf, amelynek két színosztálya között az összes lehetséges él be van húzva (tehát az A színosztály minden pontja össze van kötve az F színosztály összes pontjával).

$K_{m,n}$ jelöli azt a teljes páros gráfot, amelynek egyik színosztálya m pontú, a másik színosztálya n pontú.

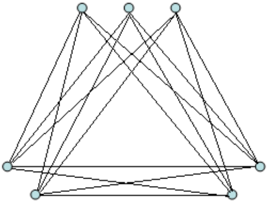


$K_{3,5}$

Megjegyzés. A síkgráfok témakörében fontos szerepet játszó „három ház - három kút" gráf a $K_{3,3}$ teljes páros gráf.

Definíció. A n pontú k részes $T_{n,k}$ Turán-gráf az az egyszerű gráf, amelynek n csúcsa van, és a csúcsok k osztályba vannak sorolva úgy, hogy

- minden osztályban a pontok száma $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$, ÉS
- két csúcs pontosan akkor összekötött $T_{n,k}$-ban, ha különböző osztályban vannak.

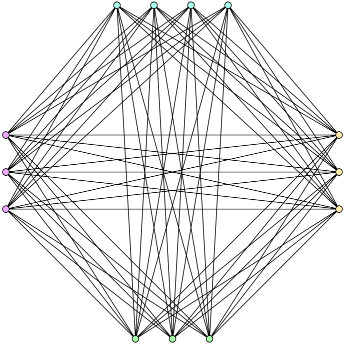


$T_{7,3}$

Kép forrása: Wikipedia

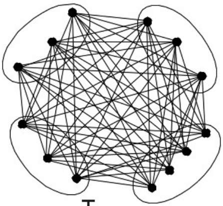
Definíció. A n pontú k részes $T_{n,k}$ Turán-gráf az az egyszerű gráf, amelynek n csúcsa van, és a csúcsok k osztályba vannak sorolva úgy, hogy

- minden osztályban a pontok száma $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$, ÉS
- két csúcs pontosan akkor összekötött $T_{n,k}$-ban, ha különböző osztályban vannak.

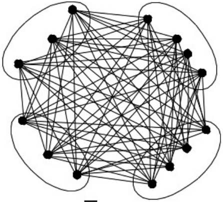


$T_{13,4}$

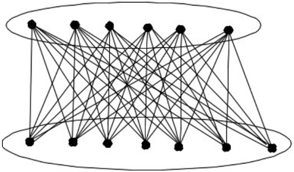
Kép forrása: Wikipedia



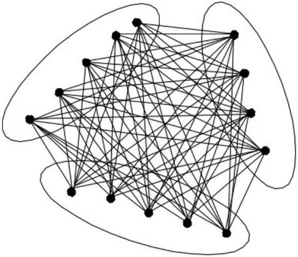
$T_{13,4}$



$T_{14,4}$



$T_{13,2}$



$T_{14,3}$

Kép forrása: Hajnal Péter honlapja

Definíció. A n pontú k részes $T_{n,k}$ Turán-gráf az az egyszerű gráf, amelynek n csúcsa van, és a csúcsok k osztályba vannak sorolva úgy, hogy

- minden osztályban a pontok száma $\lfloor n/k \rfloor$ vagy $\lceil n/k \rceil$, ÉS
- két csúcs pontosan akkor összekötött $T_{n,k}$-ban, ha különböző osztályban vannak.

Megjegyzés. A $T_{n,k}$ Turán-gráf osztályméretei egyértelműen meghatározottak, és így a $T_{n,k}$ gráf izomorfia erejéig egyértelmű:

- Ha n osztható k-val, akkor minden osztály pontosan n/k pontot tartalmaz.
- Ha $n = kq + r$, ahol $q \in \mathbb{N}$ és $r \in \{1, \ldots, k-1\}$ (maradékos osztás), akkor r darab $q+1$ pontú, és $k-r$ darab q pontú osztály van. (Miért?)

Észrevétel. A $T_{n,k-1}$ Turán-gráfban nincs k pontú klikk.

Bizonyítás. Bárhogy választjuk ki a $T_{n,k-1}$ gráf k pontját, a skatulyaelv szerint lesz közöttük kettő, amelyek ugyanabba az osztályba esnek, és így nem összekötöttek. Vagyis a kiválasztott k pont nem alkot klikket. $\square$

Észrevétel. A $T_{n,k-1}$ Turán-gráfban nincs k pontú klikk.

Bizonyítás. Bárhogy választjuk ki a $T_{n,k-1}$ gráf k pontját, a skatulyaelv szerint lesz közöttük kettő, amelyek ugyanabba az osztályba esnek, és így nem összekötöttek. Vagyis a kiválasztott k pont nem alkot klikket. $\square$

Turán Pál tétele szerint az n pontú, k-klikkmentes egyszerű gráfok között a $T_{n,k-1}$ gráfnak van a legtöbb éle:

Turán-tétel. Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz k pontú klikket, akkor $|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|$.
Továbbá egyenlőség csak a $G = T_{n,k-1}$ Turán-gráf esetén áll fenn.

Megjegyzés. $|E(T_{n,k-1})| \sim \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$,
mert a $T_{n,k-1}$ gráf minden pontjának körülbelül $\frac{k-2}{k-1}n$ a foka (+ fokszámtétel).

Turán Pál tétele szerint az n pontú, k-klikkmentes egyszerű gráfok között a $T_{n,k-1}$ gráfnak van a legtöbb éle:

Turán-tétel. Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz k pontú klikket, akkor $|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|$.
Továbbá egyenlőség csak a $G = T_{n,k-1}$ Turán-gráf esetén áll fenn.

Megjegyzés. $|E(T_{n,k-1})| \sim \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$,
mert a $T_{n,k-1}$ gráf minden pontjának körülbelül $\frac{k-2}{k-1}n$ a foka (+ fokszámtétel).

Megjegyzés. A Turán-tételt legtöbbször kontrapozitív alakban használjuk:
„Ha az n pontú G egyszerű gráfnak több éle van, mint a $T_{n,k-1}$ Turán-gráfnak, akkor G-ben van k pontú klikk."

Például a 13 pontú 4 részes $T_{13,4}$ Turán-gráfnak 63 éle van (ellenőrizzük!). Így ha egy 13 pontú egyszerű gráfnak 63-nál több éle van, akkor az a gráf biztosan tartalmaz 5 pontú klikket.

Emlékeztető (Turán-tétel). Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amely nem tartalmaz k pontú klikket, akkor $|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|$.

A Turán-tételt csak a $k = 3$ esetben bizonyítjuk (lásd tábla):

Mantel-tétel. Ha G egy n pontú egyszerű gráf, amelyben nincs háromszög, akkor $|E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

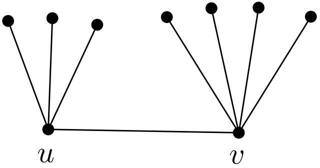
Megj. A Mantel-tétel valóban a $k = 3$ speciális esete a Turán-tételnek, mert

- a háromszögek éppen a 3 pontú klikkek,
- a $T_{n,2}$ Turán-gráf a $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$ teljes páros gráf (vö. $T_{13,2}$ a korábbi ábrán),
- $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$-nek $\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil$ éle van, és könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor.$$

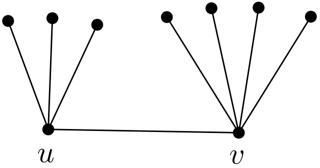
Mantel. G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf $\implies |E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Biz. Legyen G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf. Az, hogy G-ben nincs háromszög, úgy is megfogalmazható, hogy G-ben két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja.



Mantel. G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf $\implies |E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Biz. Legyen G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf. Az, hogy G-ben nincs háromszög, úgy is megfogalmazható, hogy G-ben két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja.



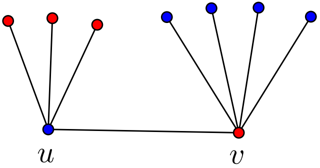
Ebből az következik, hogy ha u és v összekötött, akkor

$$d(u) + d(v) \leq n,$$

ugyanis az ábrán $d(u) + d(v)$ különböző G-beli pont látható.

Mantel. G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf $\implies |E(G)| \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Biz. Legyen G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf. Az, hogy G-ben nincs háromszög, úgy is megfogalmazható, hogy G-ben két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja.



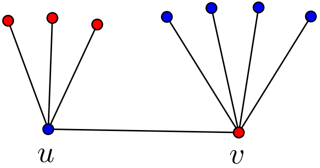
Ebből az következik, hogy ha u és v összekötött, akkor

$$d(u) + d(v) \leq n,$$

ugyanis az ábrán $d(u) + d(v)$ különböző G-beli pont látható.

Mantel. G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf $\implies |E(G)| \le \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Biz. Legyen G egy n pontú $\triangle$-mentes egyszerű gráf. Az, hogy G-ben nincs háromszög, úgy is megfogalmazható, hogy G-ben két összekötött csúcsnak nincs közös szomszédja.



Ebből az következik, hogy ha u és v összekötött, akkor

$$d(u) + d(v) \le n,$$

ugyanis az ábrán $d(u) + d(v)$ különböző G-beli pont látható.

Innentől a bizonyítás csak annyi, hogy ezt az egyenlőtlenséget felírjuk G minden uv élére, az így kapott egyenlőtlenségeket összeadjuk, majd „számolunk” ...

Mi lesz az

$$uv \in E(G) \quad \rightsquigarrow \quad d(u) + d(v) \leq n$$

egyenlőtlenségek összege?

Mi lesz az

$$uv \in E(G) \quad \rightsquigarrow \quad d(u) + d(v) \leq n$$

egyenlőtlenségek összege?

A kapott egyenlőtlenség jobb oldala nyilván $|E| \cdot n$, ugyanis mind az $|E|$ darab összeadott egyenlőtlenség jobb oldalán n szerepel.

Mi lesz az

$$uv \in E(G) \quad \rightsquigarrow \quad d(u) + d(v) \leq n$$

egyenlőtlenségek összege?

A kapott egyenlőtlenség jobb oldala nyilván $|E| \cdot n$, ugyanis mind az $|E|$ darab összeadott egyenlőtlenség jobb oldalán n szerepel.

A bal oldalon az összeadás után a v csúcshoz tartozó $d(v)$ fokszám pontosan annyiszor szerepel tagként, ahány darab v-re illeszkedő él van G-ben, és ez a szám is épp $d(v)$. Így rögzített v csúcsra a $d(v)$ tagok összege a bal oldalon $d(v) \cdot d(v) = (d(v))^2$, vagyis a kapott egyenlőtlenség bal oldala a fokszámok négyzetösszege.

Mi lesz az

$$uv \in E(G) \quad \rightsquigarrow \quad d(u) + d(v) \leq n$$

egyenlőtlenségek összege?

A kapott egyenlőtlenség jobb oldala nyilván $|E| \cdot n$, ugyanis mind az $|E|$ darab összeadott egyenlőtlenség jobb oldalán n szerepel.

A bal oldalon az összeadás után a v csúcshoz tartozó $d(v)$ fokszám pontosan annyiszor szerepel tagként, ahány darab v-re illeszkedő él van G-ben, és ez a szám is épp $d(v)$. Így rögzített v csúcsra a $d(v)$ tagok összege a bal oldalon $d(v) \cdot d(v) = (d(v))^2$, vagyis a kapott egyenlőtlenség bal oldala a fokszámok négyzetösszege. Kaptuk tehát, hogy G-ben

$$\sum_{v \in V(G)} (d(v))^2 \leq |E| \cdot n.$$

Itt tartunk:

$$\sum_{v \in V} (d(v))^2 \leq |E| \cdot n.$$

Itt tartunk:

$$n \cdot \frac{\sum_{v \in V} (d(v))^2}{n} = \sum_{v \in V} (d(v))^2 \leq |E| \cdot n.$$

Számoljunk ...

Itt tartunk:

$$n\left(\frac{\sum_{v\in V} d(v)}{n}\right)^2 \le n\cdot\frac{\sum_{v\in V}(d(v))^2}{n} = \sum_{v\in V}(d(v))^2 \le |E|\cdot n.$$

Számoljunk ...

- számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenség (négyzetre emelve), vagy Jensen-egyenlőtlenség az $f(x)=x^2$ konvex függvényre

Itt tartunk:

$$n\left(\frac{2|E|}{n}\right)^2 = n\left(\frac{\sum_{v\in V} d(v)}{n}\right)^2 \le n\cdot\frac{\sum_{v\in V}(d(v))^2}{n} = \sum_{v\in V}(d(v))^2 \le |E|\cdot n.$$

Számoljunk ...

- számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenség (négyzetre emelve), vagy Jensen-egyenlőtlenség az $f(x)=x^2$ konvex függvényre
- fokszámtétel.

Itt tartunk:

$$n\left(\frac{2|E|}{n}\right)^2 = n\left(\frac{\sum_{v\in V} d(v)}{n}\right)^2 \le n\cdot\frac{\sum_{v\in V}(d(v))^2}{n} = \sum_{v\in V}(d(v))^2 \le |E|\cdot n.$$

Számoljunk ...

- számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenség (négyzetre emelve), vagy Jensen-egyenlőtlenség az $f(x)=x^2$ konvex függvényre
- fokszámtétel.

Itt tartunk:

$$n\left(\frac{2|E|}{n}\right)^2 = n\left(\frac{\sum_{v\in V} d(v)}{n}\right)^2 \le n\cdot\frac{\sum_{v\in V}(d(v))^2}{n} = \sum_{v\in V}(d(v))^2 \le |E|\cdot n.$$

Számoljunk …

- számtani-négyzetes közép közti egyenlőtlenség (négyzetre emelve), vagy Jensen-egyenlőtlenség az $f(x)=x^2$ konvex függvényre
- fokszámtétel.

A kapott egyenlőtlenség két oldalából rendezés után

$$|E| \le \frac{n^2}{4}$$

adódik, azaz (lévén $|E|$ egész) a bizonyítandó

$$|E| \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

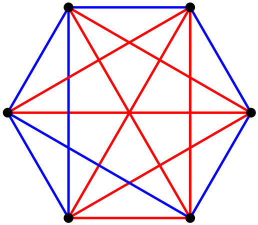
egyenlőtlenség. $\square$

Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

(Az ismeretségek természetesen ebben a feladatban is kölcsönösek.)

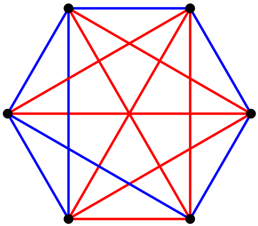
Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

Az ismeretségeket szemléltethetjük egy 6 csúcsú gráffal, ahol két csúcsot (embert) kék éllel kötünk össze, ha ismerik egymást, és pirossal kötjük őket össze, ha nem. Így egy olyan K_6 teljes gráfot kapunk, amelynek minden éle pirosra vagy kékre van színezve.



Középiskolás feladat. Bizonyítsuk be, hogy hat ember között mindig van három, akik páronként ismerik egymást vagy páronként nem ismerik egymást.

Az ismeretségeket szemléltethetjük egy 6 csúcsú gráffal, ahol két csúcsot (embert) kék éllel kötünk össze, ha ismerik egymást, és pirossal kötjük őket össze, ha nem. Így egy olyan K_6 teljes gráfot kapunk, amelynek minden éle pirosra vagy kékre van színezve.

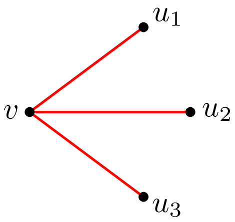


Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

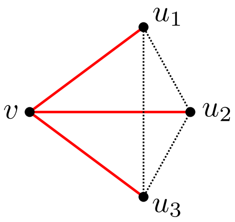
Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék élszínezett K_6-ot.
Legyen v a gráf egy tetszőleges csúcsa. A skatulyaelv szerint a v-ből induló 5 élen valamelyik szín legalább 3-szor fordul elő. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros, és tekintsünk 3 darab v-ből induló piros élt, melyek másik végpontjai legyenek u_1, u_2, u_3.



Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

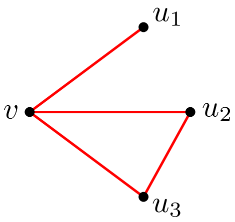
Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék élszínezett K_6-ot.
Legyen v a gráf egy tetszőleges csúcsa. A skatulyaelv szerint a v-ből induló 5 élen valamelyik szín legalább 3-szor fordul elő. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros, és tekintsünk 3 darab v-ből induló piros élt, melyek másik végpontjai legyenek u_1, u_2, u_3.



Tekintsük az u_1, u_2, u_3 pontok között haladó 3 élt.

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék élszínezett K_6-ot.
Legyen v a gráf egy tetszőleges csúcsa. A skatulyaelv szerint a v-ből induló 5 élen valamelyik szín legalább 3-szor fordul elő. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros, és tekintsünk 3 darab v-ből induló piros élt, melyek másik végpontjai legyenek u_1, u_2, u_3.

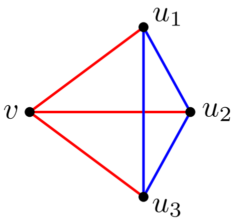


Tekintsük az u_1, u_2, u_3 pontok között haladó 3 élt.

- Ha ezen élek valamelyike piros, akkor egy ilyen él a végpontokból a v-be vezető piros élekkel együtt egy piros háromszöget ad (az ábrán ez a $vu_2u_3\triangle$).

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék élszínezett K_6-ot.
Legyen v a gráf egy tetszőleges csúcsa. A skatulyaelv szerint a v-ből induló 5 élen valamelyik szín legalább 3-szor fordul elő. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros, és tekintsünk 3 darab v-ből induló piros élt, melyek másik végpontjai legyenek u_1, u_2, u_3.

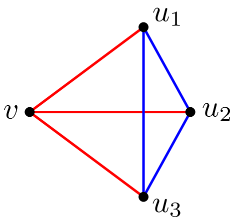


Tekintsük az u_1, u_2, u_3 pontok között haladó 3 élt.

- Ha ezen élek valamelyike piros, akkor egy ilyen él a végpontokból a v-be vezető piros élekkel együtt egy piros háromszöget ad (az ábrán ez a $vu_2u_3\triangle$).
- Ha ezen élek mindegyike kék, akkor pedig az $u_1u_2u_3$ háromszög kék.

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges piros-kék élszínezett K_6-ot.
Legyen v a gráf egy tetszőleges csúcsa. A skatulyaelv szerint a v-ből induló 5 élen valamelyik szín legalább 3-szor fordul elő. Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros, és tekintsünk 3 darab v-ből induló piros élt, melyek másik végpontjai legyenek u_1, u_2, u_3.

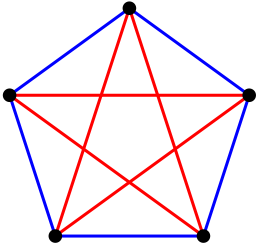


Tekintsük az u_1, u_2, u_3 pontok között haladó 3 élt.
- Ha ezen élek valamelyike piros, akkor egy ilyen él a végpontokból a v-be vezető piros élekkel együtt egy piros háromszöget ad (az ábrán ez a $vu_2u_3\triangle$).
- Ha ezen élek mindegyike kék, akkor pedig az $u_1u_2u_3$ háromszög kék.

Mindkét esetben találtunk egyszínű háromszöget. $\square$

Középiskolás feladat'. A 6 pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében megjelenik olyan háromszög, amelynek mindegyik éle ugyanolyan színű.

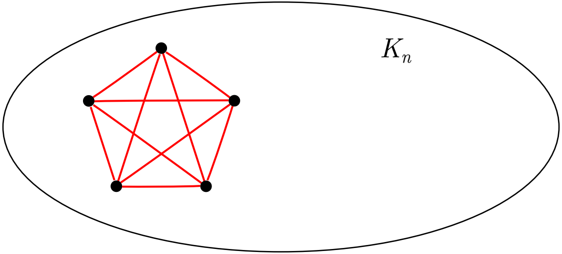
Megjegyzés. A feladat nem igaz 5 emberrel (5 pontú piros-kék élszínezett teljes gráfra):



Az ábra az 5 pontú teljes gráf egy olyan élszínezését mutatja, amelyben nincs egyszínű háromszög.

Az egyszínű háromszögek fogalmát általánosítjuk klikkekre:

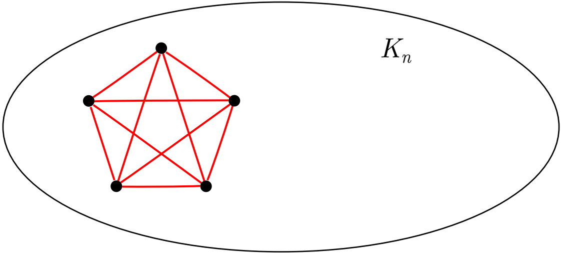
Definíció. A K_n teljes gráf piros-kék élszínezésében k pont monokromatikus klikk(et alkot), ha a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek. (A közös élszín alapján értelemszerűen beszélünk kék ill. piros monokromatikus klikkről.)



Egy 5 pontú monokromatikus klikk (piros)

Az egyszínű háromszögek fogalmát általánosítjuk klikkekre:

Definíció. A K_n teljes gráf piros-kék élszínezésében k pont monokromatikus klikk(et alkot), ha a köztük haladó élek mind ugyanolyan színűek. (A közös élszín alapján értelemszerűen beszélünk kék ill. piros monokromatikus klikkről.)



Egy 5 pontú monokromatikus klikk (piros)

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Bizonyítás. Lásd honlap / kiosztott anyag. $\square$

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-tól függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk”.

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-től függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk".

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés (az 5 csúcs/fő esetének) összegzése. $\square$

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-től függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk".

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés (az 5 csúcs/fő esetének) összegzése. $\square$

Megj. $R(4) = 18$. Azonban $k \geq 5$ esetén $R(k)$ pontos értéke nem ismert. (Pl. $R(5)$ értékéről is csak annyit tudunk jelenleg, hogy 43 és 48 között van.)

Ramsey-tétel. A 4^k pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

Definíció. Legyen $k \geq 2$. Az R(k) Ramsey-szám a legkisebb olyan (k-tól függő) N pozitív egész, amelyre igaz, hogy az „N pontú teljes gráf MINDEN piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk".

Tétel. $R(3) = 6$.

Biz. Ez a középiskolás feladat + az utána tett megjegyzés (az 5 csúcs/fő esetének) összegzése. $\square$

Megj. $R(4) = 18$. Azonban $k \geq 5$ esetén $R(k)$ pontos értéke nem ismert. (Pl. $R(5)$ értékéről is csak annyit tudunk jelenleg, hogy 43 és 48 között van.)

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Bizonyítás. A felső becslés éppen a Ramsey-tétel, így csak az alsó becslést kell igazolni. (Az alsó becslés Erdős Pál eredménye.) Ehhez azt kell kell belátni, hogy ha $n < (\sqrt{2})^k$, például ha n a legnagyobb $(\sqrt{2})^k$-nál kisebb egész, akkor az n pontú teljes gráfnak létezik olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs k pontú monokromatikus klikk.

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Bizonyítás. A felső becslés éppen a Ramsey-tétel, így csak az alsó becslést kell igazolni. (Az alsó becslés Erdős Pál eredménye.) Ehhez azt kell kell belátni, hogy ha $n < (\sqrt{2})^k$, például ha n a legnagyobb $(\sqrt{2})^k$-nál kisebb egész, akkor az n pontú teljes gráfnak létezik olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs k pontú monokromatikus klikk.

Erdős Pál a következőt mondta: Színezzük K_n éleit véletlenszerűen (1/2-1/2 valószínűséggel, egymástól függetlenül) pirosra és kékre, majd kiszámolta, hogy a mondott $n < (\sqrt{2})^k$ feltétel mellett pozitív (nemnulla) annak valószínűsége, hogy nem alakul ki k pontú monokromatikus klikk. Tehát lennie kell olyan konkrét piros-kék élszínezésnek, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Bizonyítás. A felső becslés éppen a Ramsey-tétel, így csak az alsó becslést kell igazolni. (Az alsó becslés Erdős Pál eredménye.) Ehhez azt kell kell belátni, hogy ha $n < (\sqrt{2})^k$, például ha n a legnagyobb $(\sqrt{2})^k$-nál kisebb egész, akkor az n pontú teljes gráfnak létezik olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs k pontú monokromatikus klikk.

Erdős Pál a következőt mondta: Színezzük K_n éleit véletlenszerűen (1/2-1/2 valószínűséggel, egymástól függetlenül) pirosra és kékre, majd kiszámolta, hogy a mondott $n < (\sqrt{2})^k$ feltétel mellett pozitív (nemnulla) annak valószínűsége, hogy nem alakul ki k pontú monokromatikus klikk. Tehát lennie kell olyan konkrét piros-kék élszínezésnek, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Mi is ezt tesszük, csak kiküszöböljük a valószínűségszámítási nyelvezetet (mert még nem tanultatok valószínűségszámítást) . . .

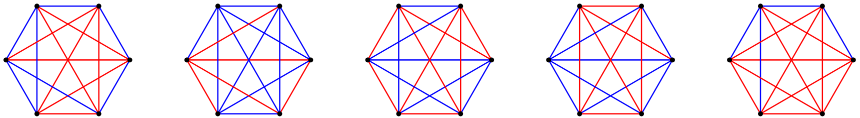
Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Legyen $n < (\sqrt{2})^k$. **Kell:** K_n-nek van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \le R(k) \le 4^k$, minden $k \ge 3$ esetén.

Legyen $n < (\sqrt{2})^k$. **Kell:** K_n-nek van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tekintsük a K_n összes piros-kék élszínezését. (Ezekből $2^{\binom{n}{2}}$ darab van.)



…

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \le R(k) \le 4^k$, minden $k \ge 3$ esetén.

Legyen $n < (\sqrt{2})^k$. **Kell:** K_n-nek van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tekintsük a K_n összes piros-kék élszínezését. (Ezekből $2^{\binom{n}{2}}$ darab van.)

Minden k elemű $K \subset V(K_n)$ ponthalmazra csináljuk a következőt: Tegyünk egy $\times$-et azokhoz az élszínezésekhez, amelyek a K csúcshalmazú k-klikket monokromatikusra színezik. (Egy színezéshez több $\times$-et is teszünk, ha több monokromatikus k-klikk is van benne.)

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \le R(k) \le 4^k$, minden $k \ge 3$ esetén.

Legyen $n < (\sqrt{2})^k$. **Kell:** K_n-nek van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tekintsük a K_n összes piros-kék élszínezését. (Ezekből $2^{\binom{n}{2}}$ darab van.)

Minden k elemű $K \subset V(K_n)$ ponthalmazra csináljuk a következőt: Tegyünk egy $\times$-et azokhoz az élszínezésekhez, amelyek a K csúcshalmazú k-klikket monokromatikusra színezik.

Az így kirakott $\times$-ek száma: $\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

Ugyanis minden rögzített K választásra $2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$ darab $\times$-et rakunk ki (azokra az élszínezésekre teszünk, amelyekben a K pontjai között haladó $\binom{k}{2}$ él mindegyike piros, vagy mindegyike kék (2 lehetőség), és a többi $\binom{n}{2}-\binom{k}{2}$ éle K_n-nek tetszőleges színű), és $\binom{n}{k}$ darab k-elemű K ponthalmaz van K_n-ben.

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

Legyen $n < (\sqrt{2})^k$. **Kell:** K_n-nek van olyan piros-kék élszínezése, amelyben nincs monokromatikus k-klikk.

Tekintsük a K_n összes piros-kék élszínezését. (Ezekből $2^{\binom{n}{2}}$ darab van.)

Minden k elemű $K \subset V(K_n)$ ponthalmazra csináljuk a következőt: Tegyünk egy $\times$-et azokhoz az élszínezésekhez, amelyek a K csúcshalmazú k-klikket monokromatikusra színezik.

Az így kirakott $\times$-ek száma: $\displaystyle\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

Mindjárt kiszámoljuk, hogy ez a szám kisebb $2^{\binom{n}{2}}$-nél, K_n összes piros-kék élszínezései számánál. Ez azt jelenti, hogy még ha az $\times$-eket mind különböző élszínezésekre is tettük volna (nem ez a helyzet), akkor is maradna olyan élszínezése K_n-nek, amelyre nem került $\times$. Ebben az élszínezésben nincs monokromatikus k pontú klikk, készen vagyunk. $\square$

Tétel (Erdős és Ramsey). $(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k$, minden $k \geq 3$ esetén.

A hiányzó számolás: $n < (\sqrt{2})^k$ (és $k \geq 3$) esetén

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}.$$

Biz. A $2^{\binom{n}{2}}$-vel való osztás utáni ekvivalens alakot látjuk be:

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(\sqrt{2})^{k^2}}{k!} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{2^{\frac{k^2}{2}+1-\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!} < 1.$$

- 1. egyenlőtlenség: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} < \frac{n\cdot n\cdot\dots\cdot n}{k!} = \frac{n^k}{k!}$.
- 2. egyenlőtlenség: Itt használtuk az $n < (\sqrt{2})^k$ feltételt.
- Utolsó egyenlőtlenség: Az $a_k = \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!}$ jelöléssel élve egyszerű számolás, hogy $a_3 < 1$. Továbbá $a_k > a_{k+1}$, ha $k \geq 3$, ugyanis $a_{k+1}/a_k = \sqrt{2}/(k+1) < 1$.

Köszönöm a figyelmet!

THE END