Euler-vonal. Euler-tétel.

Kombinatorika

8. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. március 21.

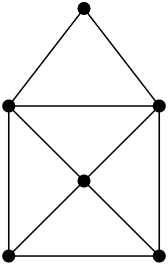
Def. A G gráfban a $\mathcal{V}$ séta Euler-vonal, G minden élén pontosan egyszer áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát" egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G-ben.

Def. A G gráfban a $\mathcal{V}$ séta Euler-vonal, G minden élén pontosan egyszer áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát" egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G-ben.

Példa (nyílt Euler-vonal).

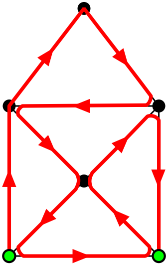


Egy Euler-vonal is lehet nyílt vagy zárt (mint séta).

Def. A G gráfban a $\mathcal{V}$ séta Euler-vonal, G minden élén pontosan egyszer áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát" egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G-ben.

Példa (nyílt Euler-vonal).

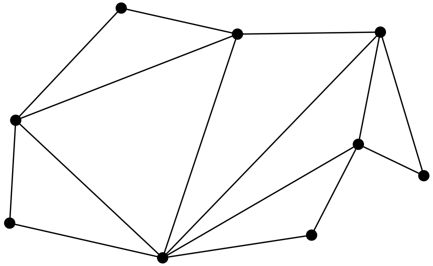


Egy Euler-vonal is lehet nyílt vagy zárt (mint séta).

Def. A G gráfban a $\mathcal{V}$ séta Euler-vonal, G minden élén pontosan egyszer áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát" egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G-ben.

Példa (zárt Euler-vonal).

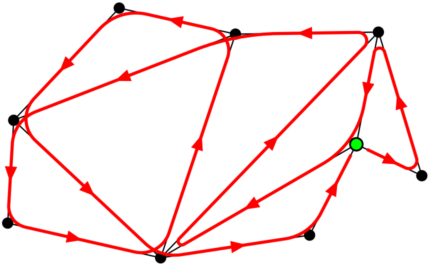


Egy Euler-vonal is lehet nyílt vagy zárt (mint séta).

Def. A G gráfban a $\mathcal{V}$ séta Euler-vonal, G minden élén pontosan egyszer áthalad, továbbá meglátogatja G összes csúcsát.

A „meglátogatja G összes csúcsát" egy technikai feltétel csupán; ez automatikusan következik az élekre vonatkozó feltételből, ha nincs izolált (0 fokú) csúcs G-ben.

Példa (zárt Euler-vonal).



Egy Euler-vonal is lehet nyílt vagy zárt (mint séta).

Euler-tétel.

a) Egy G gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha G összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

b) Egy G gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha G összefüggő, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

A két állítás együtt a következőt adja:

c) Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha G összefüggő, és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Kiegészítés. A b) pont bizonyításából majd kiolvasható lesz, hogy amennyiben két páratlan fokú csúcs van (és öf. a gráfunk), akkor minden (nyílt) Euler-vonal a két páratlan fokú csúcs között halad: egyikből indul, másikban végződik.

Euler-tétel.

a) Egy G gráfban akkor és csak akkor van zárt Euler-vonal, ha G összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

b) Egy G gráfban akkor és csak akkor van nyílt Euler-vonal, ha G összefüggő, és pontosan két páratlan fokú csúcsa van.

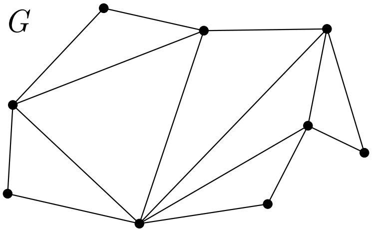
A két állítás együtt a következőt adja:

c) Egy G gráfban akkor és csak akkor van Euler-vonal, ha G összefüggő, és 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Megjegyzés. Mivel egy gráfban nem lehet pontosan 1 darab páratlan fokú csúcs (a fokszámösszeg mindig páros), ezért a c) állításban a „0 vagy 2 páratlan fokú csúcs van" feltétel úgy is megfogalmazható, hogy „legfeljebb két páratlan fokú csúcs van".

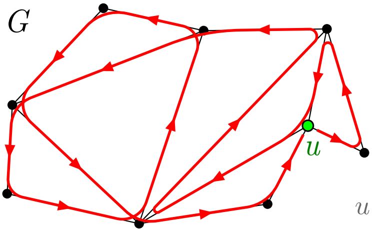
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\implies$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

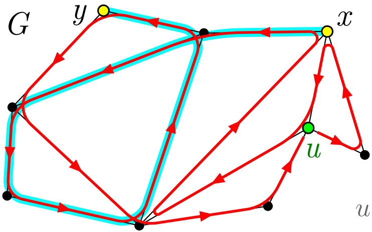
Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.



u: kezdőpont/végpont

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

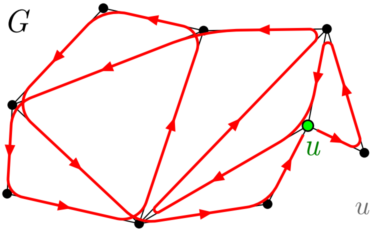
Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓



u: kezdőpont/végpont

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal <u>át</u>halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓



u: kezdőpont/végpont

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

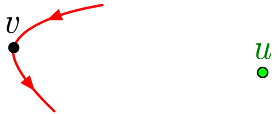
Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:
- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal <u>át</u>halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓
Részletezve:
- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:



Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

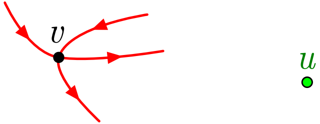
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal <u>át</u>halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonalban nincs élismétlés.)



Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

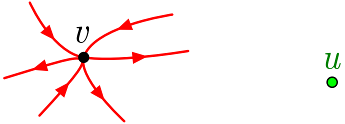
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végpontjé is). ✓

Részletezve:

- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonalban nincs élismétlés.)



Járjuk be az Euler-vonalat, és figyeljük v környezetét ...

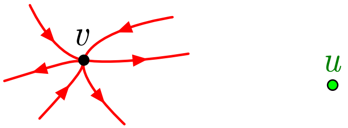
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal <u>át</u>halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha v az Euler-vonal kezdő/végpontjától különböző csúcs:

(Az Euler-vonal minden élt bejárt, ez az összes élvég v körül.)



$d(v) = 2 \times (\text{áthaladások száma})$ $\leftarrow$ páros

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\implies$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\implies$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\implies$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal áthalad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle

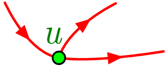
$$d(u) = 1 +$$

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal átható halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végpontjé is). ✓

Részletezve:
• Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle
– áthaladások u-n



$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) +$$

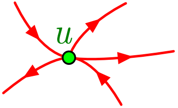
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal <u>át</u>halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle
– áthaladások u-n



$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) +$$

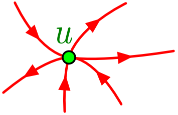
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$ *irány, azaz a feltételek szükségessége:*
Tegyük fel, hogy a G gráfban van zárt Euler-vonal.
1. Az Euler-vonal (definíció szerint) meglátogatja G összes csúcsát, így bármely két csúcs között van séta (például az Euler-vonal két csúcs közötti szakasza) $\Longrightarrow$ G összefüggő. ✓
2. Amikor az Euler-vonal át halad egy csúcson, akkor egy ilyen áthaladás 2-vel járul hozzá a csúcs fokszámához (bemegy/kimegy) $\Longrightarrow$ minden csúcs foka páros (az u kezdő/végponté is). ✓

Részletezve:

- Ha u a zárt Euler-vonal kezdőpontja (és egyben végpontja):

– az Euler-vonal első éle
– áthaladások u-n
– az Euler-vonal utolsó éle

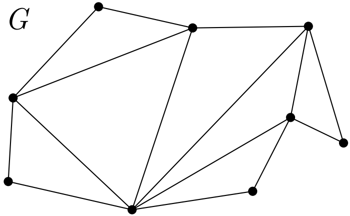


$$d(u) = 1 + 2 \times (\text{áthaladások száma}) + 1 \quad \leftarrow \text{páros}$$

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

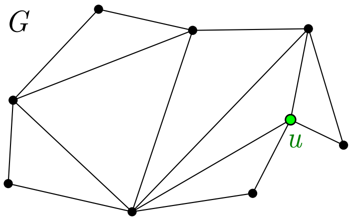
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, amedddig csak tudjuk ...



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

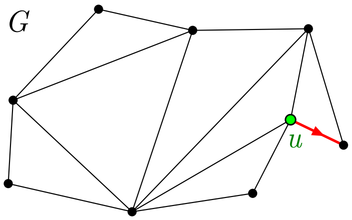
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk . . .

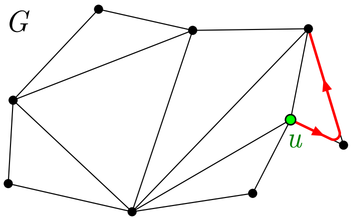


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...

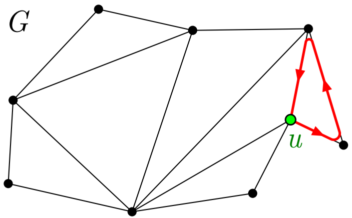


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, amedddig csak tudjuk ...

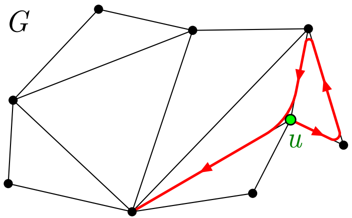


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...

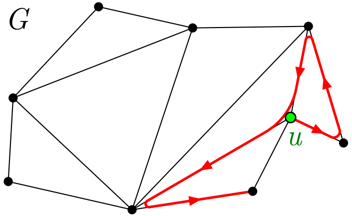


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, ameddig csak tudjuk ...

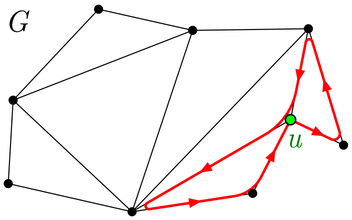


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Növeljük addig a vonalat, amedddig csak tudjuk ...

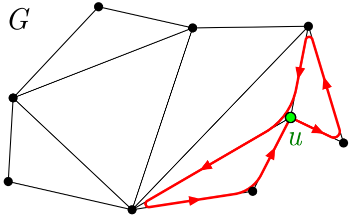


Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

Mivel egy G-beli vonal hossza legfeljebb $|E(G)|$ lehet, valamikor biztosan elakadunk (= nem tudunk érintetlen élen továbblépni).



Ha egy csúcsból többfelé léphetünk tovább, akkor találomra választunk egy jó irányt.

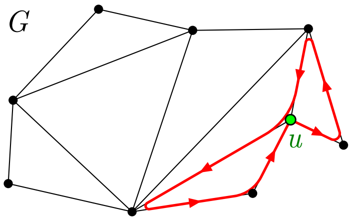
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.

1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

$\forall$ fok páros $\Longrightarrow$ Csak a kiinduló u csúcsban akadhatunk el!

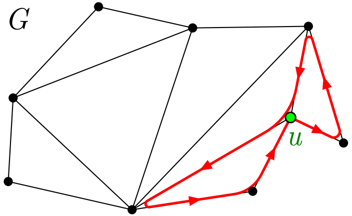


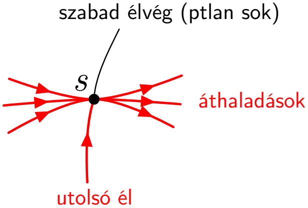
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).

$\forall$ fok páros $\Longrightarrow$ Csak a kiinduló u csúcsban akadhatunk el!

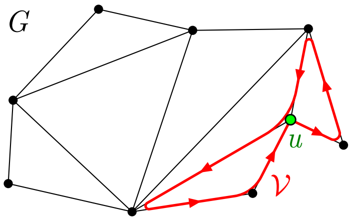
OKA: Amikor egy u-tól különböző s csúcsban állunk, akkor ezen a csúcson korábban már valahányszor áthaladtunk (bemegy/kimegy), majd végül beléptünk, így összesen páratlan sok s-ből induló élvégen jártunk már. Mivel s foka páros, kell még lennie „szabad'' élvégnek, amin tovább tudunk haladni.





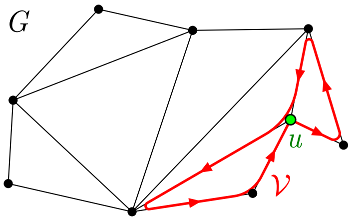
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy <u>zárt</u> $\mathcal{V}$ vonalat kapunk G-ben.



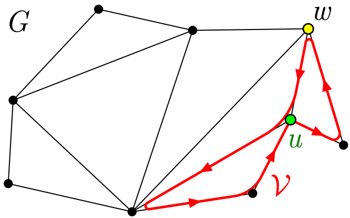
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy zárt $\mathcal{V}$ vonalat kapunk G-ben.
3. Ha ez a $\mathcal{V}$ Euler-vonal, akkor készen vagyunk. (Tfh. nem az.)



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*
Tfh. a G gráf összefüggő, és minden csúcsának foka páros.
1. Egy tetszőleges u csúcsból indítsunk el egy vonalat, vigyázva arra, hogy már bejárt élre ne lépjünk többet (mohó vonalnövelés).
2. Elakadáskor egy <u>zárt</u> $\mathcal{V}$ vonalat kapunk G-ben.
3. Ha ez a $\mathcal{V}$ Euler-vonal, akkor készen vagyunk. (Tfh. nem az.)
4. Legyen w egy olyan csúcs $\mathcal{V}$-n, amelyből indul „fekete" (nem $\mathcal{V}$-beli) él is. Mivel G összefüggő, ilyen csúcs van.

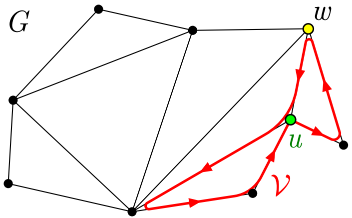


Egy tetszőleges $\mathcal{V}$-beli csúcsból sétáljuk el egy tetszőleges fekete élre. Tekintsük az első olyan pillanatot, amikor a „bepirosozott" élhalmazból kilépve fekete élre lépünk.

a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

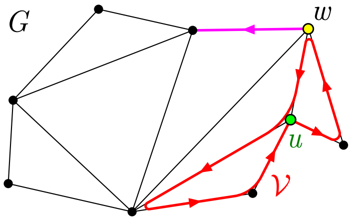
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

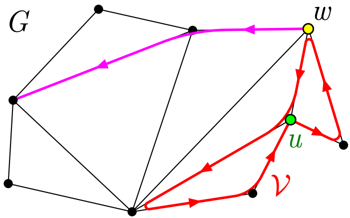
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

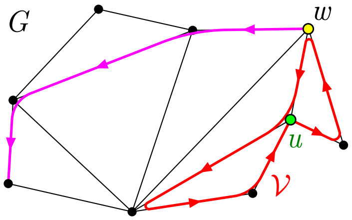
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

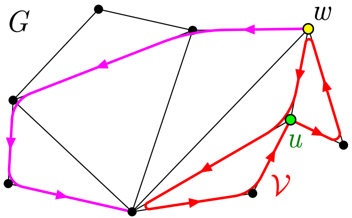
5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.



a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

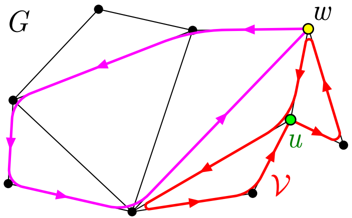


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w-ben)!



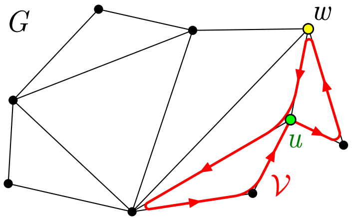
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w-ben)!

A lényeg: Elinduláskor a fekete részgráfban is minden pont foka páros. Ugyanis a $\mathcal{V}$ zárt vonal élei által alkotott „piros" részgráfban minden pont foka páros (bemegy/kimegy...); és G-ben is páros minden fok; továbbá „páros − páros = páros".



Azt pedig már meggondoltuk, hogy egy csupa páros fokú gráfban a mohó vonalnövelés zárt vonalat eredményez elakadáskor. (Az összefüggőség nem kellett hozzá. Ezt a fekete részgráfról nem is tudjuk.)

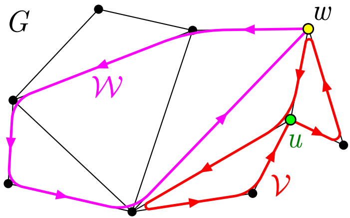
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w-ben)!

A lényeg: Elinduláskor a fekete részgráfban is minden pont foka páros. Ugyanis a $\mathcal{V}$ zárt vonal élei által alkotott „piros" részgráfban minden pont foka páros (bemegy/kimegy...); és G-ben is páros minden fok; továbbá „páros − páros = páros".



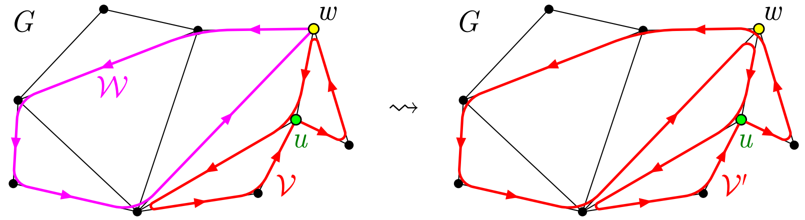
a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

5. Mohó vonalnöveléssel indítsunk vonalat w-ből a FEKETE (még nem bejárt) élek által alkotott részgráfban.

Elakadáskor ez a vonal is záródni fog (w-ben)!

6. Az így kapott $\mathcal{W}$ zárt vonalat a w pontnál „betoldhatjuk" $\mathcal{V}$-be (lásd ábra), ezzel egy hosszabb $\mathcal{V}'$ zárt vonalat kapunk G-ben. (A w pont választása miatt $\mathcal{W}$ legalább egy élt tartalmaz, így $\mathcal{V}'$ valóban hosszabb $\mathcal{V}$-nél.)

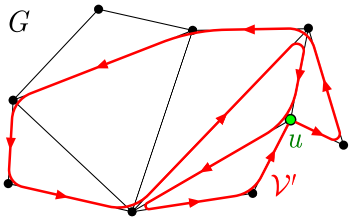


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

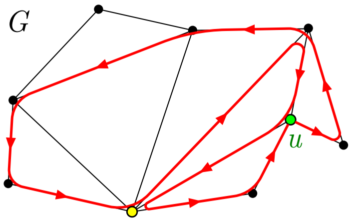


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

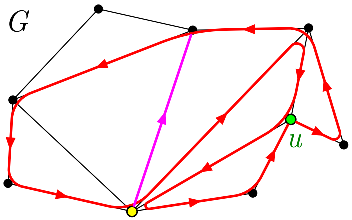


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

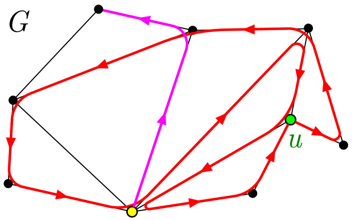


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow G$ öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

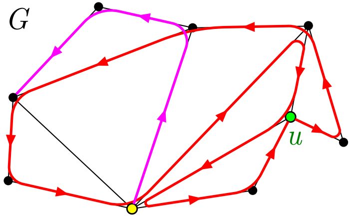


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\iff$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

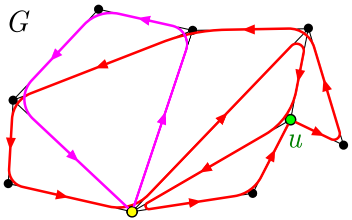


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). $\square$

*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.

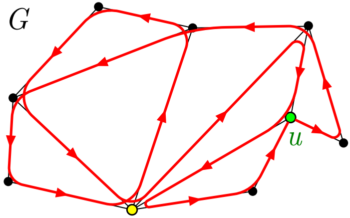


a) G-ben van zárt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G öf. és $\forall$ pont foka páros.

Bizonyítás. $\Longleftarrow$ *irány, azaz a feltételek elégségessége:*

7. Most ugyanaz a szituáció van előttünk, mint korábban: G gráfunkban be van pirosozva egy zárt vonal (csak $\mathcal{V}'$-nek hívjuk, nem $\mathcal{V}$-nek). Tehát ha $\mathcal{V}'$ még nem Euler-vonal, akkor az előbb látott módon tudjuk bővíteni; az érvelés ugyanaz. És így tovább, ilyen „betoldó" bővítésekkel előbb-utóbb egy zárt Euler-vonalhoz jutunk (amikor már minden élt bejár a vonalunk*). □

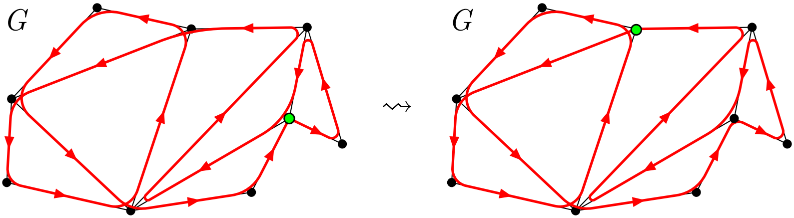
*: és akkor persze minden csúcsot is meglátogat G összefüggősége miatt.



Megjegyzések. **1.** Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy algoritmust is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

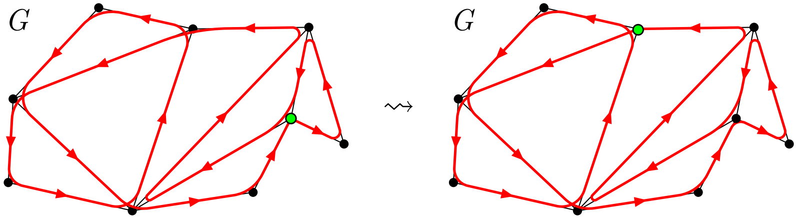
Megjegyzések. 1. Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy algoritmust is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

2. Egy <u>zárt</u> Euler-vonal kezdő/végpontjának valójában csak a formális leírásban van kitüntetett szerepe: A zárt Euler-vonal „mentén” bármely csúcsba „eltolhatjuk” a kezdő/végpontot; továbbra is zárt Euler-vonalat kapunk (lásd ábra).



Megjegyzések. **1.** Kiemeljük, hogy bizonyításunk egy algoritmust is ad egy zárt Euler-vonal megtalálására (amennyiben a gráfunk teljesíti a tételben előírt feltételeket).

2. Egy zárt Euler-vonal kezdő/végpontjának valójában csak a formális leírásban van kitüntetett szerepe: A zárt Euler-vonal „mentén'' bármely csúcsba „eltolhatjuk'' a kezdő/végpontot; továbbra is zárt Euler-vonalat kapunk (lásd ábra).



3. Természetesen egy gráfban létezhet több zárt Euler-vonal is (sőt, ez a jellemző, ha a gráf teljesíti a tétel feltételeit).

b) G-ben van nyílt Euler-vonal $\Longleftrightarrow$ G összefüggő, és két páratlan fokú csúcsa van.

Bizonyítás. Az „$\Longrightarrow$" irány egyszerű, az a) állításnál látottakhoz teljesen hasonló. A fokszámok paritásának vizsgálatánál azt kapjuk, hogy a nyílt Euler-vonal két (különböző) végpontjának páratlan a foka (a kiinduló és a befejező él miatt), a többi csúcs foka pedig páros.

b) G-ben van nyílt Euler-vonal $\iff$ G összefüggő, és két páratlan fokú csúcsa van.

Bizonyítás. Az „$\Longrightarrow$" irány egyszerű, az a) állításnál látottakhoz teljesen hasonló. A fokszámok paritásának vizsgálatánál azt kapjuk, hogy a nyílt Euler-vonal két (különböző) végpontjának páratlan a foka (a kiinduló és a befejező él miatt), a többi csúcs foka pedig páros.

Az „$\Longleftarrow$" irány pedig visszavezethető az a) állításra: Legyen a két páratlan fokú csúcs u és v. Húzzunk be egy új élt u és v közé. (Akkor is, ha már össze vannak kötve; ekkor párhuzamos élt hozunk létre, ami nem okoz gondot.) A kapott G' gráf nyilván összefüggő lesz, és minden pontjának foka páros lesz, így az a) állítás szerint tartalmaz egy $\mathcal{V}$ zárt Euler-vonalat. Az általunk behúzott új él törlése után a $\mathcal{V}$-ből „megmaradó" vonal az eredeti G gráf egy nyílt Euler-vonalát adja. $\square$