A kombinatorika alapelvei. Részhalmazok.

Kombinatorika

1. előadás

SZTE Bolyai Intézet

Szeged, 2023. február 7.

Honlapom: `http://www.math.u-szeged.hu/~ngaba/`

Itt megtalálhatók az elérhetőségeim, fogadóórám, illetve az előadás és a gyakorlat honlapja stb. A kurzushonlapokról minden kivetített vagy kiosztott segédanyag letölthető, illetve elérhető a pontos tételsor is (ld. TEMATIKA).

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- Két zárthelyi [max. 20 + 20 pont]: március 29.(?) és május 10.
- Házi feladatok [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- Pluszpontok [max. 10 pont]: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik ZH javítható/pótolható, a házi feladatok nem.
- A 60 pontból legalább 25 pontot kell szerezni az aláíráshoz.

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- Két zárthelyi [max. 20 + 20 pont]: március 29.(?) és május 10.
- Házi feladatok [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- Pluszpontok [max. 10 pont]: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik ZH javítható/pótolható, a házi feladatok nem.
- A 60 pontból legalább 25 pontot kell szerezni az aláíráshoz.

Előadás [max. 40 pont]:

- Vizsga [max. 40 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (1 kombinatorika és 1 gráfelmélet tételből). További részletek a honlapon.
- Pluszpontok: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.
- A 40 pontból legalább 15 pontot el kell érni a kurzus teljesítéséhez.

Gyakorlat [max. 60 pont]:

- Két zárthelyi [max. 20 + 20 pont]: március 29.(?) és május 10.
- Házi feladatok [max. 20 pont]: Összesen 12 adag, 2-2 pont értékben, a legjobb 10 pontszám számít.
- Pluszpontok [max. 10 pont]: Órai munkáért, szorgalmi feladatokért.
- Az egyik ZH javítható/pótolható, a házi feladatok nem.
- A 60 pontból legalább 25 pontot kell szerezni az aláíráshoz.

Előadás [max. 40 pont]:

- Vizsga [max. 40 pont]: Rövid írásbeli beugró + szóbeli vizsga (1 kombinatorika és 1 gráfelmélet tételből). További részletek a honlapon.
- Pluszpontok: Érdemi hozzászólásért, illetve bármilyen hibajelzésért.
- A 40 pontból legalább 15 pontot el kell érni a kurzus teljesítéséhez.

Jegy: 0 – 50: **(1)** 51 – 62: **(2)** 63 – 75: **(3)** 76 – 87: **(4)** 88 – 100: **(5)**

Jelölések / konvenciók.

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ (természetes számok halmaza)

$\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (pozitív egészek halmaza)

$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ (standard n elemű halmaz)

$|A|$ halmaz vagy multihalmaz elemszáma

$\dot\cup$ halmazok diszjunkt uniója, pl. $A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C$. Ez a szokásos halmazelméleti unió, azzal a többletinformációval, hogy az összeuniózott halmazok páronként diszjunktak.

Egy tipikus kombinatorika feladat.

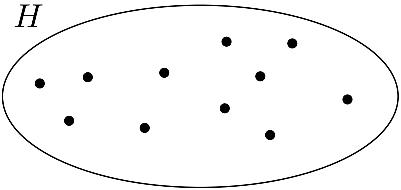
Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

Egy összeszámlálási feladat egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.



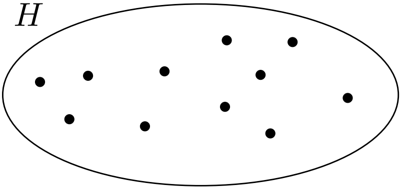
$$|H| = ?$$

Egy tipikus kombinatorika feladat.

Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?

A kombinatorika alapproblémája.

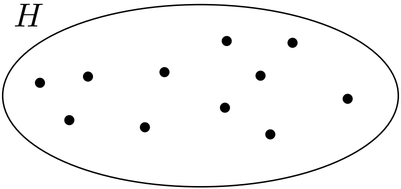
Egy összeszámlálási feladat egy adott H véges halmaz elemszámának meghatározását kéri.



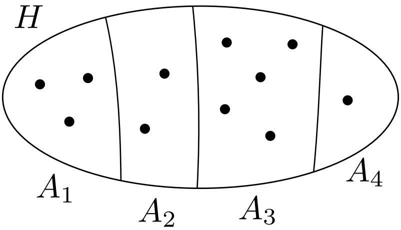
$$|H| = ?$$

A megszámolandó objektumokat ugyanis belerakhatjuk egy halmazba. Például a fenti feladatban az 5-tel osztható hétjegyű palindrom számok halmazának elemszámát kell meghatározni.

Mikor adunk össze?

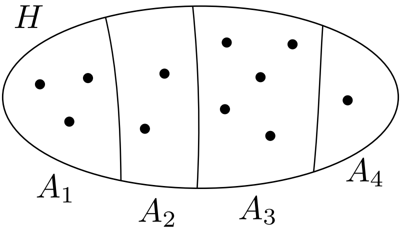


Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

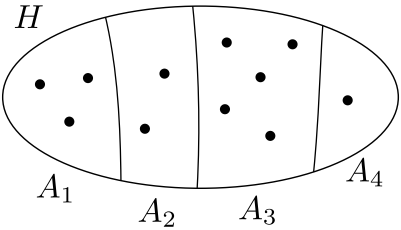
Összeadási alapelv. Ha a H véges halmaz elemeit osztályozzuk az

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq H$$

halmazokba (tehát H minden eleme pontosan egy A_i halmazban szerepel), akkor

$$|H| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Mikor adunk össze? Amikor osztályozunk (= csoportosítunk).



$$|H| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 3 + 2 + 5 + 1 = 11.$$

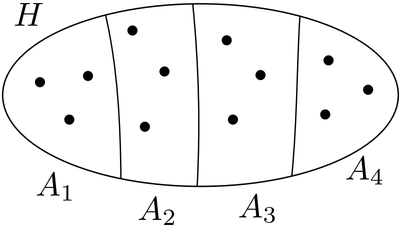
Összeadási alapelv (tömör verzió). Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \ldots \dot\cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|,$$

ahol $\dot\cup$ a diszjunkt uniót jelöli.

Mikor szorzunk?

Mikor szorzunk? 1. Egyrészt akkor, amikor több egyforma méretű osztályt is kialakítunk, és az összeadási alapelv alkalmazásakor ezen osztályok elemszámának összege szorzással adódik. (Általános iskola: A szorzás ismételt összeadás.)



$$|H| = 3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3.$$

(Ez még nem a szorzási alapelv.)

Mikor szorzunk? **2.** Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „ ... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „ . . . Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál effélé szituációba kerülünk: „ . . . Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Emlékeztető. Az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ azon k-asok ($\approx k$ hosszú sorozatok) halmazát jelöli, amelyek első eleme A_1-ből, második eleme A_2-ből, . . . , k-adik eleme A_k-ból kerül ki. Formálisan,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \ldots,\ a_k \in A_k\}.$$

Mikor szorzunk? 2. Másrészt akkor, ha egy összeszámlálási problémánál efféle szituációba kerülünk: „ ... Ennek a valaminek a megválasztására 3 lehetőség van, a tőle független *másik* valaminek a megválasztására pedig 5 lehetőség van, további megkötések nélkül.”

Majd ebből arra következtetünk, hogy „Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.”

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

A fenti példában ha A_1 jelöli az „egyik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, A_2 jelöli a „másik valami”-re vonatkozó választási lehetőségek halmazát, akkor az $A_1 \times A_2$ halmaz elemei (a rendezett párok) a két választás lehetséges együttes kimeneteleinek felelnek meg.

Szorzási alapelv. Tetszőleges $A_1, \ldots, A_k$ véges halmazokra

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k|.$$

Bizonyítás. Osztályozzuk $A_1 \times \cdots \times A_k$ elemeit (k-asait) aszerint, hogy mi a k-as első eleme. Ekkor $|A_1|$ darab osztály jön létre, és minden osztályban $|A_2 \times \cdots \times A_k|$ darab k-as lesz, így az összeadási alapelv szerint

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2 \times \cdots \times A_k|.$$

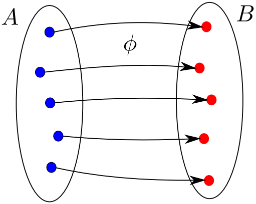
Ezt a gondolatmenetet megismételve $A_2 \times \cdots \times A_k$-re, kapjuk, hogy

$$|A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_2| \cdot |A_3 \times \cdots \times A_k|.$$

És így tovább, ebből adódik az állítás. (Ez valójában egy k szerinti indukcióval történő bizonyítás volt, szemléletesen elmondva.) $\square$

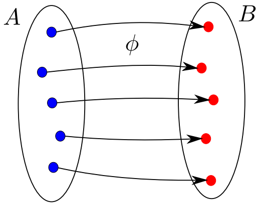
Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

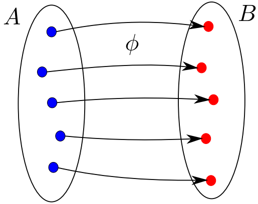
- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



Ekvivalens definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció, ha minden B-beli elemnek pontosan egy őse van A-ban.

Definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció (vagy párbaállító leképezés), ha

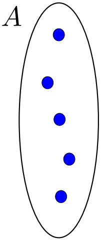
- injektív, azaz különböző A-beli elemek képe különböző (tehát $a_1 \neq a_2$ esetén $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$), ÉS
- szürjektív, azaz minden B-beli elem előáll képként (tehát tetszőleges $b \in B$ elemhez található olyan $a \in A$ elem, amelyre $\phi(a) = b$).



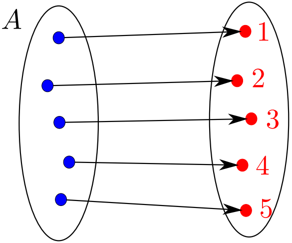
Ekvivalens definíció. A $\phi\colon A \to B$ leképezés bijekció, ha minden B-beli elemnek pontosan egy őse van A-ban.

Bijekciós alapelv. Tetszőleges A, B véges halmazok esetén pontosan akkor létezik $A \to B$ bijekció, ha $|A| = |B|$.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan definiáljuk ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan definiáljuk ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)

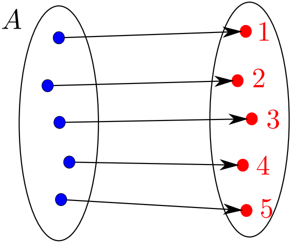


$$\implies |A| = 5.$$

Definíció. Az A halmaz elemszáma n, ha létezik $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő" megszámolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n-re.

Apropó. Egész pontosan mit is értünk egy halmaz elemszámán? Hogyan definiáljuk ezt a fogalmat? (Ezt még nem tisztáztuk. Ezzel kellett volna kezdeni a kurzust.)



$\implies |A| = 5.$

Definíció. Az A halmaz elemszáma n, ha létezik $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ bijekció.

Megjegyzés. Egy halmaz elemeinek „ujjal történő" megszámolása közben tulajdonképpen épp egy ilyen bijekciót adunk meg valamely n-re.

Definíció. Egy A halmaz véges, ha $|A| = n$ valamely n természetes számra.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Bizonyítás. (Indirekt.) Ha minden skatulyába legfeljebb 1 tárgy kerülne, akkor a skatulyákban összesen legfeljebb $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m$ tárgy lenne, ami ellentmondás, mert $m+1$ tárgyat osztottunk szét. $\square$

Csak arról van szó, hogy ha s_i-vel jelöljük az i-edik skatulyában lévő tárgyak számát, akkor

$$s_1 \le 1,\ s_2 \le 1,\ \ldots,\ s_m \le 1 \implies s_1+s_2+\cdots+s_m \le \underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{-szer}} = m.$$

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. **a)** Ha minden skatulyába n/m-nél (szigorúan) kevesebb tárgy kerülne, akkor összesen kevesebb, mint

$$\overbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}^{m\text{-szer}}=n$$

tárgyunk lenne. $\square$

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Bizonyítás. **b)** Ha minden skatulyába n/m-nél (szigorúan) több tárgy kerülne, akkor összesen több, mint

$$\overbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}^{m\text{-szer}}=n$$

tárgyunk lenne. $\square$

Skatulyaelv. Ha $m+1$ tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor lesz olyan skatulya, amelybe legalább 2 tárgy kerül.

Általánosított skatulyaelv. Ha n tárgyat szétosztunk m skatulyába, akkor

a) Lesz olyan skatulya, amelybe legalább n/m (tehát legalább $\lceil n/m \rceil$) tárgy kerül.

b) Lesz olyan skatulya, amelybe legfeljebb n/m (tehát legfeljebb $\lfloor n/m \rfloor$) tárgy kerül.

Megjegyzés. Az általánosított skatulyaelv csak annak a ténynek a bonyolultabb megfogalmazása, hogy ha vesszük néhány szám átlagát, akkor az átlag a legnagyobb és a legkisebb szám között van. ($n/m =$ átlagos skatulyatartalom.)

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.”)

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.")

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H részhalmazai.

A halmaz (informálisan) különböző objektumok összessége, melyek között nincs sorrendiség. („Egy zsák, amiben különböző dolgok vannak.")

Ha a H halmazból kiválasztunk néhány elemet úgy, hogy az elemek kiválasztásának sorrendje nem számít, akkor a lehetséges kiválasztások éppen a H részhalmazai.

Definíció. Egy H halmaz hatványhalmazán a H összes részhalmazainak halmazát értjük, és ezt $\mathcal{P}(H)$-val jelöljük. Formálisan, $\mathcal{P}(H) := \{R : R \subseteq H\}$.

Példa. A $H = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmaza:

$$\mathcal{P}(H) = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\Big\}.$$

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részhalmazai:

				$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$a\ b\ c$		$\circ\ \circ\ \circ$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$\color{red}{a}\ b\ c$		$\bullet\ \circ\ \circ$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$a\ \color{red}{b}\ c$		$\circ\ \bullet\ \circ$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$a\ b\ \color{red}{c}$	$\equiv$	$\circ\ \circ\ \bullet$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$\color{red}{a\ b}\ c$		$\bullet\ \bullet\ \circ$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$\color{red}{a}\ b\ \color{red}{c}$		$\bullet\ \circ\ \bullet$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$a\ \color{red}{b\ c}$		$\circ\ \bullet\ \bullet$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$\color{red}{a\ b\ c}$		$\bullet\ \bullet\ \bullet$		$1\ 1\ 1$

Szemléltetés. $H = \{a, b, c\}$ részhalmazai:

				$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$a\ b\ c$		$\circ\ \circ\ \circ$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \circ\ \circ$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$a\ b\ c$		$\circ\ \bullet\ \circ$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$a\ b\ c$	$\equiv$	$\circ\ \circ\ \bullet$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \bullet\ \circ$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \circ\ \bullet$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$a\ b\ c$		$\circ\ \bullet\ \bullet$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \bullet\ \bullet$		$1\ 1\ 1$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \underline{a\ b\ c} & & \underline{a\ b\ c} \\
\emptyset & & a\ b\ c & \circ\ \circ\ \circ & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & a\ b\ c & \bullet\ \circ\ \circ & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & a\ b\ c & \circ\ \bullet\ \circ & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & a\ b\ c & \equiv\ \circ\ \circ\ \bullet & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a,b\} & & a\ b\ c & \bullet\ \bullet\ \circ & & 1\ 1\ 0 \\
\{a,c\} & & a\ b\ c & \bullet\ \circ\ \bullet & & 1\ 0\ 1 \\
\{b,c\} & & a\ b\ c & \circ\ \bullet\ \bullet & & 0\ 1\ 1 \\
\{a,b,c\} & & a\ b\ c & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Tétel. Egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bizonyítás. Legyen H egy n elemű halmaz. H egy részhalmazát úgy állíthatjuk elő, hogy a H halmaz minden elemére eldöntjük, hogy belevesszük-e a részhalmazba vagy nem („$\bullet$ vagy $\circ$”). Ez n független döntés, mindegyik elemnél kétféle lehetőséggel, ami a szorzási alapelv szerint összesen valóban $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-szer}} = 2^n$ lehetőség. $\square$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

$$
\begin{array}{c}
\\
\emptyset \\ \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{a,b\} \\ \{a,c\} \\ \{b,c\} \\ \{a,b,c\}
\end{array}
\equiv
\begin{array}{c}
\\
{\color{gray}a}\ {\color{gray}b}\ {\color{gray}c} \\
{\color{red}a}\ {\color{gray}b}\ {\color{gray}c} \\
{\color{gray}a}\ {\color{red}b}\ {\color{gray}c} \\
{\color{gray}a}\ {\color{gray}b}\ {\color{red}c} \\
{\color{red}a}\ {\color{red}b}\ {\color{gray}c} \\
{\color{red}a}\ {\color{gray}b}\ {\color{red}c} \\
{\color{gray}a}\ {\color{red}b}\ {\color{red}c} \\
{\color{red}a}\ {\color{red}b}\ {\color{red}c}
\end{array}
\equiv
\begin{array}{ccc}
{\color{blue}a} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} \\ \hline
\circ & \circ & \circ \\
\bullet & \circ & \circ \\
\circ & \bullet & \circ \\
\circ & \circ & \bullet \\
\bullet & \bullet & \circ \\
\bullet & \circ & \bullet \\
\circ & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet
\end{array}
\equiv
\begin{array}{ccc}
{\color{blue}a} & {\color{blue}b} & {\color{blue}c} \\ \hline
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{array}
$$

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

				$a\ b\ c$		$a\ b\ c$
$\emptyset$		$a\ b\ c$		$\circ\ \circ\ \circ$		$0\ 0\ 0$
$\{a\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \circ\ \circ$		$1\ 0\ 0$
$\{b\}$		$a\ b\ c$		$\circ\ \bullet\ \circ$		$0\ 1\ 0$
$\{c\}$	$\equiv$	$a\ b\ c$	$\equiv$	$\circ\ \circ\ \bullet$	$\equiv$	$0\ 0\ 1$
$\{a, b\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \bullet\ \circ$		$1\ 1\ 0$
$\{a, c\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \circ\ \bullet$		$1\ 0\ 1$
$\{b, c\}$		$a\ b\ c$		$\circ\ \bullet\ \bullet$		$0\ 1\ 1$
$\{a, b, c\}$		$a\ b\ c$		$\bullet\ \bullet\ \bullet$		$1\ 1\ 1$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

A $H = \{a, b, c\}$ halmaz részhalmazainak jobb szélső kódolása vezet el a karakterisztikus vektor fogalmához ...

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & a\ b\ c & & a\ b\ c \\
\hline
\emptyset & & a\ b\ c & & \circ\ \circ\ \circ & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & \color{red}{a}\ b\ c & & \bullet\ \circ\ \circ & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & a\ \color{red}{b}\ c & & \circ\ \bullet\ \circ & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & a\ b\ \color{red}{c} & \equiv & \circ\ \circ\ \bullet & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a, b\} & & \color{red}{a}\ \color{red}{b}\ c & & \bullet\ \bullet\ \circ & & 1\ 1\ 0 \\
\{a, c\} & & \color{red}{a}\ b\ \color{red}{c} & & \bullet\ \circ\ \bullet & & 1\ 0\ 1 \\
\{b, c\} & & a\ \color{red}{b}\ \color{red}{c} & & \circ\ \bullet\ \bullet & & 0\ 1\ 1 \\
\{a, b, c\} & & \color{red}{a}\ \color{red}{b}\ \color{red}{c} & & \bullet\ \bullet\ \bullet & & 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} & & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\hline
\emptyset & & a\ b\ c & & \circ \circ \circ & & 0\ 0\ 0 \\
\{a\} & & a\ b\ c & & \bullet \circ \circ & & 1\ 0\ 0 \\
\{b\} & & a\ b\ c & & \circ \bullet \circ & & 0\ 1\ 0 \\
\{c\} & \equiv & a\ b\ c & \equiv & \circ \circ \bullet & \equiv & 0\ 0\ 1 \\
\{a,b\} & & a\ b\ c & & \bullet \bullet \circ & & 1\ 1\ 0 \\
\{a,c\} & & a\ b\ c & & \bullet \circ \bullet & & 1\ 0\ 1 \\
\{b,c\} & & a\ b\ c & & \circ \bullet \bullet & & 0\ 1\ 1 \\
\{a,b,c\} & & a\ b\ c & & \bullet \bullet \bullet & & 1\ 1\ 1
\end{array}
$$

Definíció. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű alaphalmaz. Az $R \subseteq H$ részhalmaz karakterisztikus vektora az az n-koordinátából álló 0-1-vektor, amelynek i-edik koordinátája pontosan akkor 1, ha $h_i \in R$; különben a koordináta 0. Jelölése: $\vec{\chi}_R$.

Példa. $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ és $R = \{2, 3, 5\}$ esetén $\vec{\chi}_R = (0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$.

Megjegyzés. A karakterisztikus vektor definiálásához (és értelmezéséhez) le kell rögzíteni az alaphalmaz elemeinek egy sorrendjét!

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ egy n-elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. $\square$

Állítás. Legyen $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ egy n-elemű halmaz. Ekkor a

$$\Phi\colon \mathcal{P}(H) \to \{0,1\}^n, \quad R \mapsto \vec{\chi}_R$$

leképezés bijekció, azaz Φ bijektíven párbaállítja H részhalmazait az n hosszú 0-1-vektorokkal.

Bizonyítás. Könnyen végiggondolható. $\square$

Következmény. Az „egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van" állítás bizonyításának (szőrszálhasogatóan) precíz leírása:

Legyen H egy n elemű halmaz. Az előző állítás szerint létezik bijekció $\mathcal{P}(H)$ és a $\{0,1\}^n$ halmaz között. Így a bijekciós alapelv szerint

$$\left|\mathcal{P}(H)\right| = \left|\{0,1\}^n\right| = \Bigl|\overbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}^{n\text{-szer}}\Bigr| = \overbrace{\left|\{0,1\}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\{0,1\}\right|}^{n\text{-szer}} = \overbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}^{n\text{-szer}} = 2^n,$$

ahol a 3. egyenlőségnél a szorzási alapelvet használtuk. $\square$

Tétel. Egy nemüres H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

Tehát pontosan a részhalmazok fele, azaz 2^{n-1} darab részhalmaz páros elemszámú, ahol n a H elemszáma.

Tétel. Egy nemüres H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

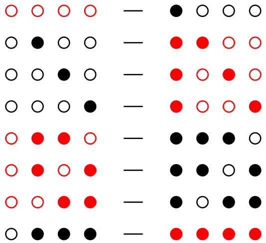
Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H-nak a h_1-et nem tartalmazó részhalmazait párbaállítjuk a h_1-et tartalmazó részhalmazokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$-et választjuk. (Ez párbaállítás.)

○ ○ ○ ○	—	● ○ ○ ○
○ ● ○ ○	—	● ● ○ ○
○ ○ ● ○	—	● ○ ● ○
○ ○ ○ ●	—	● ○ ○ ●
○ ● ● ○	—	● ● ● ○
○ ● ○ ●	—	● ● ○ ●
○ ○ ● ●	—	● ○ ● ●
○ ● ● ●	—	● ● ● ●

Az 1. oszlop felel meg h_1-nek.

Tétel. Egy nemüres H halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint ahány páratlan elemszámú.

Bizonyítás. Legyen h_1 a H egy rögzített eleme. A H-nak a h_1-et nem tartalmazó részhalmazait párbaállítjuk a h_1-et tartalmazó részhalmazokkal úgy, hogy egy $R \subseteq H \setminus \{h_1\}$ halmaz párjának $\{h_1\} \cup R$-et választjuk. (Ez párbaállítás.)



Mivel mindegyik párban 1-gyel tér el a két résztvevő halmaz elemszáma, így mindegyik párban az egyik halmaz páros elemszámú, a másik páratlan elemszámú. Ez bizonyítja az állítást. $\square$

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Definíció. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható egy n elemű halmaz k elemű részhalmazainak számát jelöli.

Ez értelmes definíció, mert nem függ az n elemű halmaz választásától. (Miért?)

Példa. Például $\binom{5}{3} = 10$, mert az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaznak 10 darab 3-elemű részhalmaza van:

1	2	3	4	5
●	●	●	○	○
●	●	○	●	○
●	●	○	○	●
●	○	●	●	○
●	○	●	○	●
●	○	○	●	●
○	●	●	●	○
○	●	●	○	●
○	●	○	●	●
○	○	●	●	●

Tétel.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Tétel. $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozzuk. Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k=0,1,\ldots,n$. $\square$

Tétel. $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozzuk. Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k=0,1,\ldots,n$. $\square$

Kettős leszámlálás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Tétel. $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Bizonyítás. Mindkét oldal az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz részhalmazait számolja össze:

Jobb oldal: Láttuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n darab részhalmaza van.

Bal oldal: A bal oldalon a részhalmazokat elemszám szerint osztályozzuk. Az $\binom{n}{k}$ tag az $\{1,\ldots,n\}$ halmaz k elemű részhalmazait számolja meg, $k=0,1,\ldots,n$. $\square$

Kettős leszámlálás. Ha egy összeszámlálási problémát kétféleképpen is megoldunk (helyesen), akkor a két válasz egyenlő.

Ez nyilvánvaló. Azért kapott ez nevet, mert két mennyiség egyenlőségét néha így a legegyszerűbb igazolni, alkalmas összeszámlálási probléma felmutatásával.

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót'', amelynek első betűje A, B vagy C; második betűje w, x, y vagy z; a harmadik betűje pedig α vagy β.

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A, B vagy C; második betűje w, x, y vagy z; a harmadik betűje pedig α vagy β.

Kapcsolódik.

$$(A+B+C)(w+x+y+z)(\alpha+\beta)=$$

$$Aw\alpha+Aw\beta+Ax\alpha+Ax\beta+Ay\alpha+Ay\beta+Az\alpha+Az\beta+$$
$$Bw\alpha+Bw\beta+Bx\alpha+Bx\beta+By\alpha+By\beta+Bz\alpha+Bz\beta+$$
$$Cw\alpha+Cw\beta+Cx\alpha+Cx\beta+Cy\alpha+Cy\beta+Cz\alpha+Cz\beta.$$

Feladat. Soroljuk fel az összes olyan 3-betűs „szót”, amelynek első betűje A, B vagy C; második betűje w, x, y vagy z; a harmadik betűje pedig α vagy β.

Kapcsolódik.

$$(A+B+C)(w+x+y+z)(\alpha+\beta) =$$

$$Aw\alpha + Aw\beta + Ax\alpha + Ax\beta + Ay\alpha + Ay\beta + Az\alpha + Az\beta +$$

$$Bw\alpha + Bw\beta + Bx\alpha + Bx\beta + By\alpha + By\beta + Bz\alpha + Bz\beta +$$

$$Cw\alpha + Cw\beta + Cx\alpha + Cx\beta + Cy\alpha + Cy\beta + Cz\alpha + Cz\beta.$$

Észrevétel. Tekintsünk egy olyan n-tényezős szorzatot, ahol mindegyik tényező egy összeg, és bontsuk fel a zárójeleket. A „minden tagot minden taggal összeszorzunk” lépés úgy is megfogalmazható, hogy vesszük a $Z_1 \times \cdots \times Z_n$ halmaz elemeit, ahol Z_i az i-edik zárójel tagjainak halmaza, és minden $(t_1, \ldots, t_n) \in Z_1 \times \cdots \times Z_n$ n-eshez felvesszük a $t_1 \cdot \ldots \cdot t_n$ szorzatot, majd ezeket a szorzatokat $+$ jellel kapcsoljuk össze.