

A RAMSEY-TÉTEL

TÉTEL. (RAMSEY) A 4^k pontú teljes gráf minden piros-kék élszínezésében található k pontú monokromatikus klikk.

A következő segédtételt fogjuk belátni, amelyből azonnal következik a Ramsey-tétel:

LEMMA. A 2^m pontú teljes gráf tetszőleges piros-kék élszínezésében található olyan K kék klikk és P piros klikk, melyekre $|K| + |P| \geq m$. (Itt $|K|$ és $|P|$ a klikkek pontszámait jelöli.)

Ugyanis a lemma $m = 2k$ választással azt adja, hogy a $2^{2k} = 4^k$ pontú teljes gráf tetszőleges piros-kék élszínezésében található olyan K kék klikk és P piros klikk, hogy $|K| + |P| \geq 2k$. E két monokromatikus klikk közül a nagyobbik pontszámú legalább k pontú (skatulyaelv), készen vagyunk. (Természetesen nem baj, ha k -nál nagyobb pontszámú monokromatikus klikket találunk: ekkor vesszük k tetszőleges pontját.) \square

A lemma bizonyítása. m szerinti indukciónal bizonyítunk. Az $m = 1$ eset nyilvánvaló: egy piros-kék élszínezett 2 pontú teljes gráf egyik csúcsát kijelölhetjük K -nak, a másik csúcsot P -nek, így két megfelelő (1 pontú) klikket kapunk.

Tegyük fel, hogy $(m - 1)$ -re már bizonyítottuk az állítást, és tekintsünk most egy tetszőleges piros-kék élszínezett 2^m pontú teljes gráfot. Legyen v a teljes gráf egy tetszőleges csúcsa. A v -ből induló $2^m - 1$ élen valamelyik szín legalább

$$\left\lceil \frac{2^m - 1}{2} \right\rceil = 2^{m-1}\text{-szer}$$

fordul elő (skatulyaelv). Az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy ez a szín a piros. Vegyünk 2^{m-1} darab v -ből induló piros élt, és jelölje ezen élek másik (v -től különböző) végpontjainak halmazát U . Az U pontjai között haladó élek egy piros-kék élszínezett 2^{m-1} pontú teljes gráfot adnak az U csúcshalmazon, így az indukciós feltevés szerint létezik egy $K' \subseteq U$ kék klikk és egy $P' \subseteq U$ piros klikk úgy, hogy $|K'| + |P'| \geq m - 1$. Mivel $P' \cup \{v\}$ egy piros klikk az eredeti (2^m pontú) teljes gráfban, ezért a $K := K'$ és $P := P' \cup \{v\}$ választással egy olyan kék illetve piros klikket kapunk, amelyek rendelkeznek a kívánt $|K| + |P| \geq m$ tulajdonsággal, hiszen $|K| = |K'|$ és $|P| = |P'| + 1$. \square

