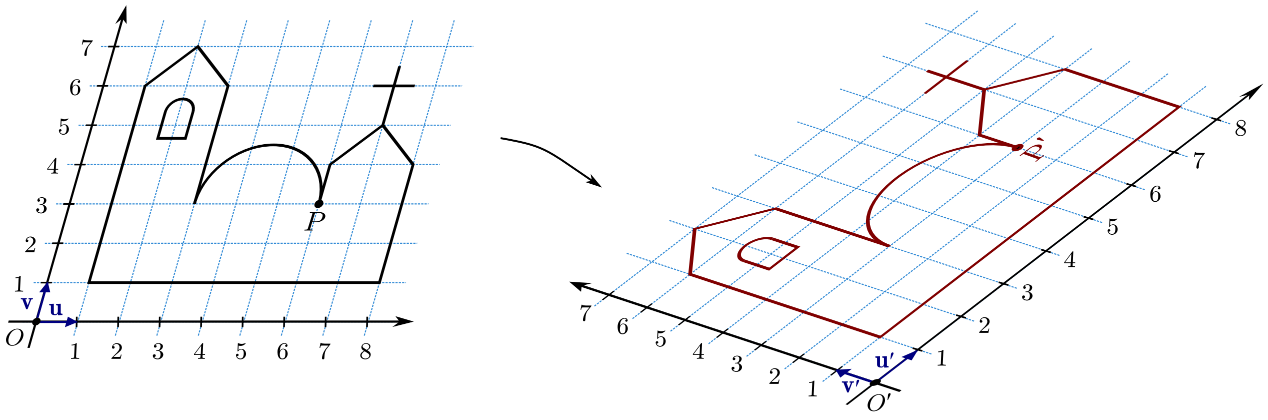
AFFIN TÜKRÖZÉS, NYÍRÁS, DILATÁCIÓ A SÍKON (SZEMLÉLTETÉS)

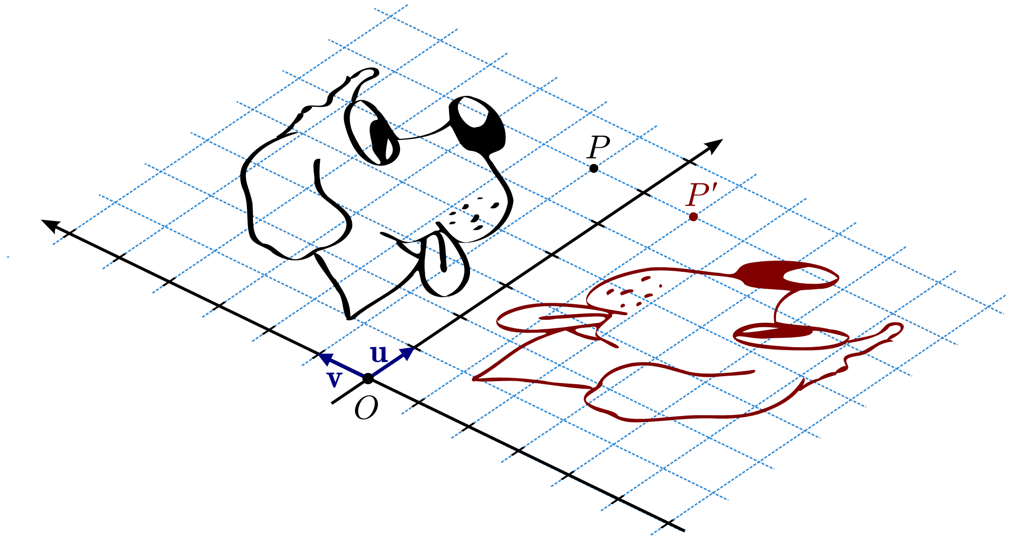
Az $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ koordinátarendszert az $(O', \mathbf{u}', \mathbf{v}')$ koordinátarendszerbe vivő **affinitást** szemlélteti a következő ábra (az ábrán egy irányítástartó affinitás látható, a pontok képét piros színnel jelöltük):



1. ábra: Egy affinitás

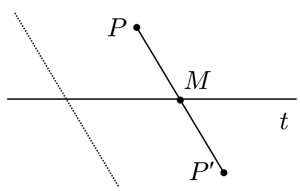
Az alábbiakban néhány speciális affinitást tekintünk. (Mindig az affinitásnak megfelelő koordinátatranszformációt adjuk meg egy alkalmas $(O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ koordinátarendszerben.)

A 2. ábrán az $(x, y) \mapsto (x, y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x, -y)$ alakú (irányításváltó) **affin tükrözés** látható.



2. ábra: Affin tükrözés

A fenti leírás azt jelenti, hogy egy P pont képét a következőképpen kaphatjuk meg (lásd még 3. ábra):

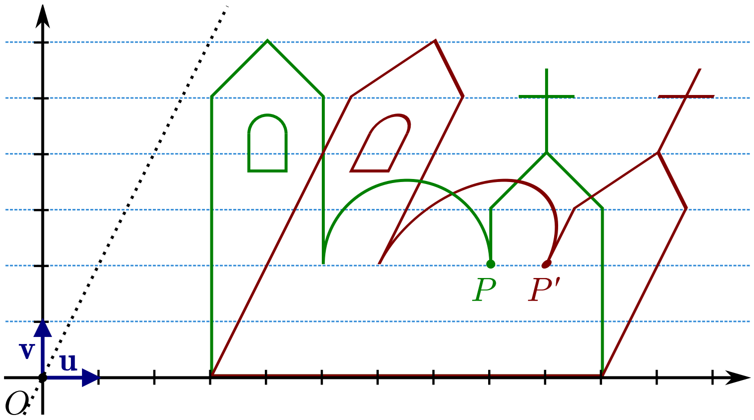


3. ábra

P-n át párhuzamost húzunk a $\mathbf{v}$ bázisvektor által meghatározott tengellyel, majd a másik tengellyel vett metszéspontot M-mel jelölve, a P' kép az a pont lesz, amelyre $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{PM}$. (Euklideszi síkon P' az a pont a szóban forgó egyenesen az $\mathbf{u}$-tengely másik oldalán, mely ugyanakkora távolságra van M-től, mint P.) Tehát szemléletesen fogalmazva, $\mathbf{u}$ a tükörtengelyt jelöli ki (a 3. ábrán t-vel jelölve), $\mathbf{v}$ pedig a tükrözés irányát (a klasszikus tengelyes tükrözésnél ez az irány merőleges a tükörtengelyre). Megfordítva, az is világos, hogy akárhogy választjuk meg a tükörtengelyt és az irányt, az ezen két egyenes metszéspontja és egy-egy irányvektora által kijelölt koordinátázásban a transzformáció a kívánt mátrixos alakban áll elő, azaz az affin tükrözések pontosan az iménti geometriai jellemzéssel leírható transzformációk.

A térbeli affin tükrözések esete analóg, csupán annyi a különbség, hogy egyenes helyett síkra tükrözünk, szintén tetszőleges iránnyal.

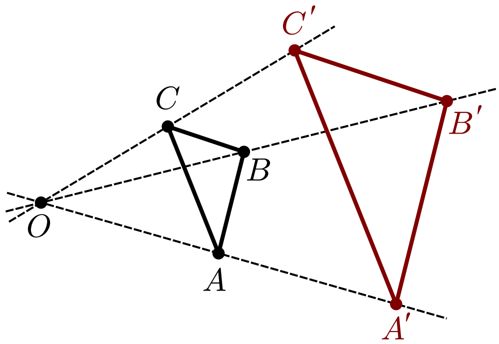
A 4. ábrán egy **nyírás** látható, melyet az $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = (x + \frac{1}{2}y, y) = (x,y) + \frac{1}{2}y \cdot (1,0)$ koordinátatranszformációval definiáltunk. (Minden nyírás irányítástartó.) E formula szerint a transzformáció az (x,y) koordinátájú pontot eltolja az $\mathbf{u}$ bázisvektor $\frac{1}{2}y$-szorosával, azaz minden pontot az $\mathbf{u}$-tengellyel párhuzamosan tol el, ahol az eltolás mértéke csak az y koordinátától függ (lineárisan). Tehát az $\mathbf{u}$-tengely minden pontja fix, továbbá minden ezzel párhuzamos egyenest invariánsan hagy a transzformáció (pontjain egy „1-dimenziós" eltolást végezve). Ha egy tetszőleges $\mathbf{u}$-tengelyt metsző egyenest (pl. a $\mathbf{v}$-tengelyt) összehasonlítunk a képével (az új koordinátarendszer $\mathbf{v}'$-tengelyével), akkor szemmel is leolvashatjuk az eltolás mértékét az $\mathbf{u}$-tengelytől távolodva.



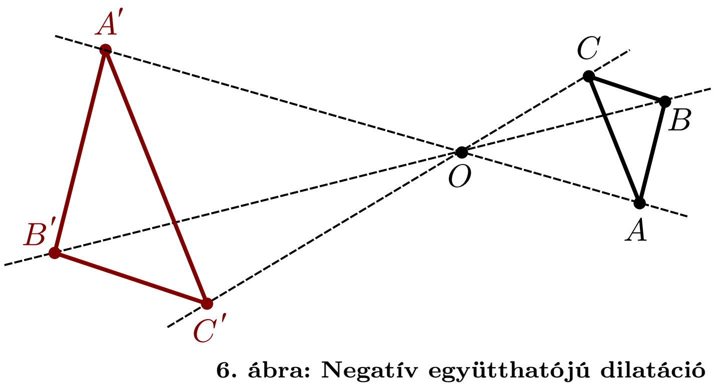
4. ábra: Nyírás

Az általános $(x,y) \mapsto (x_0, y_0) + (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ alak analóg módon értelmezhező: Először elvégezzük az $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ „homogén" nyírást – az a paraméter változtatásával csak a „dőlés" (előjeles) mértéke változik –, majd utána minden pontot eltolunk az $x_0\mathbf{u} + y_0\mathbf{v}$ konstans vektorral.

Végezetül az $(x,y) \mapsto (x,y)\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda x, \lambda y) = \lambda \cdot (x,y)$ alakú (irányítástartó) **dilatációkkal** foglalkozunk. Az 5. ábrán a $\lambda = 2$ eset, a 6. ábrán a $\lambda = -2$ eset látható. A fenti definíció alapján tetszőleges P pont képe az a P' pont lesz, melyre $\overrightarrow{OP'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$. Vagyis a dilatáció nem más, mint a középiskolában középpontos hasonlóság néven ismert transzformáció.



5. ábra: Pozitív együtthatójú dilatáció



6. ábra: Negatív együtthatójú dilatáció