12. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Adottak a p, q pozitív egészek. Az általánosított huszár a hagyományos huszárhoz hasonlóan L-alakban lép a sakktáblán, az egyik irányba p, a másik irányba q mezőt ugorva. Bizonyítsuk be, hogy az általánosított huszár csak páros sok lépés után térhet vissza a kiinduló mezőjére. (A sakktábla tetszőlegesen nagy lehet.)

2. Lehetséges-e a 3-dimenziós térben felvenni egy P konvex poliédert és annak belsejében egy O pontot úgy, hogy P minden lapjára teljesüljön, hogy ha O-t merőlegesen vetítjük a lap síkjára, akkor a vetület a lapon kívülre essen?

3. Rakjunk le a síkra rendre $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ sugarú diszjunkt (nyílt) körlapokat úgy, hogy a középpontok sorozata konvergens legyen.

4. Határozzuk meg az összes olyan folytonosan differenciálható $f\colon [0,1] \to (0,\infty)$ függvényt, amelyre $\frac{f(1)}{f(0)} = e$, és

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)^2} + \int_0^1 f'(x)^2 \mathrm{d}x \leq 2.$$

5. Előttünk van 99 gyümölcskosár; mindegyikben almák és narancsok vannak. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani 50 kosarat úgy, hogy az 50 kosárban együttesen benne legyen legalább az összes alma fele, és legalább az összes narancs fele is.

6. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Tegyük fel, hogy az $f\colon [a,b] \to [a,b]$ függvényre teljesül, hogy

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|,$$

minden $x, y \in [a,b]$ esetén. Válasszunk egy tetszőleges $x_1 \in [a,b]$ számot, és az

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$$

rekurzióval definiáljuk az $x_2, x_3, \ldots$ számokat. Mutassuk meg, hogy az $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sorozat az f függvény valamely fixpontjához tart.

7. Konstruáljunk olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely pontosan az irracionális helyeken folytonos.

Megjegyzés: Nincs olyan $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely pontosan a racionális helyeken folytonos.

8. Adottak a $D_1, D_2, \ldots, D_n$ zárt körlapok a síkon. Jelölje a_{ij} a $D_i \cap D_j$ síkidom területét. Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq 0$$

egyenlőtlenség tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ valós számokra fennáll.