

9. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Prove that, given two potatoes, you can draw a closed curve on the surface of each so that the two curves are identical as curves in three-dimensional space.

2. A egy olyan pozitív egészekből álló halmaz, hogy minden $x, y \in A$ elemre

$$x > y \implies x - y \geq \frac{xy}{25}.$$

Határozzuk meg, hogy legfeljebb hány eleme lehet A -nak.

3. 24 különböző értékű pénzérme van lerakva az asztalra egy sorban. Két játékos játszik, akik felváltva vesznek el egy-egy pénzérmét. A szabály az, hogy mindig a sor valamelyik széléről lehet csak venni. Mutassuk meg, hogy a kezdő játékos fel tudja venni az érmék értékének legalább a felét.

4. Keressük meg az összes olyan $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényt, amelyre minden $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$19f(x) - 17f(f(x)) = 2x.$$

5. Egy mérhető síkbeli alakzat területe nagyobb mint n (ahol $n \in \mathbb{N}$). Igazoljuk, hogy az alakzatnak van olyan eltoltja, amely legalább $n + 1$ rácspontot tartalmaz.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{(2n-1)/2} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{(2n+1)/2}$$