

#### 4. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Legyen  $0 < a < b$ . Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\int_a^b (x^2 + 1)e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

2. Prove that there exist 2018 consecutive integers, each of which is divisible by the cube of some integer greater than 1.

SEGÍTSÉG: Honlapon.

3. Az egész együtthatós,  $n$ -edfokú  $p(x)$  polinom  $2n + 1$  különböző egész helyen vesz fel prím értéket. Bizonyítsuk be, hogy  $p(x)$  irreducibilis  $\mathbb{Z}[x]$ -ben.

4. Van-e olyan folytonos  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amelyre minden  $x$  pontban teljesül, hogy  $f(x)$  pontosan akkor racionális, ha  $f(x + 1)$  irracionális?

5. Az  $a, b, c$  komplex számokra

$$a|bc| + b|ca| + c|ab| = 0.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor

$$|(a - b)(b - c)(c - a)| \geq 3\sqrt{3}|abc|.$$

6. Legyen  $R$  egy zérusosztómentes, nem-kommutatív gyűrű, és legyen  $n > 2$  egész. Tegyük fel, hogy  $x^n = x$  minden  $x \in R$  elemre. Mutassuk meg, hogy ekkor fennáll  $xy^{n-1} = y^{n-1}x$  minden  $x, y \in R$  elemre.