

3. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Mutassuk meg, hogy minden pozitív racionális szám felírható (nem feltétlenül különböző) prímszámokból képzett faktoriálisok szorzatainak hányadosaként. Például,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

2. Alice and Bob play a game in which they take turns filling entries of an initially empty 2018×2018 matrix. Alice plays first. At each turn, a player chooses a real number and places it in a vacant entry. The game ends when all the entries are filled. Alice wins if the determinant of the resulting matrix is nonzero; Bob wins if it is zero. Which player has a winning strategy?

3. Adott egy A pozitív valós szám. Mik a $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ összeg lehetséges értékei, ha x_0, x_1, x_2, \dots olyan pozitív valós számok lehetnek, melyekre $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$?

4. Adott egy n -dimenziós kocka. Tekintsük az összes olyan szakaszt, amely a kocka két különböző csúcsát köti össze. Ezek a szakaszok hány különböző metszéspontot határoznak meg (nem számolva a csúcsokat)?

5. Legyen f egy háromszor differenciálható $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelynek legalább öt különböző valós gyöke van. Bizonyítsuk be, hogy az $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ függvénynek legalább két különböző valós gyöke van.

SEGÍTSÉG: Ha egy differenciálható függvénynek legalább k különböző valós gyöke van, akkor a deriváltfüggvényének legalább $k - 1$ különböző valós gyöke van. (Miért?)

6. Egy számkódos záron 1-től 8-ig vannak a számjegyek, és a kód háromjegyű. A zár meghibásodott, és azóta a kinyitásához elég, ha a beütött háromjegyű szám (legalább) két helyen megegyezik a valódi kóddal. Ha nem tudjuk a valódi kódot, akkor legkevesebb hány háromjegyű szám kipróbálása szükséges ahhoz, hogy biztosan kinyíljon valamelyikre ez a hibás zár?

MEGJEGYZÉS: Például 64 próba elég: végigpróbálhatjuk az összes 1-essel kezdődő számhármast, és valamelyiknek az utolsó két jegye biztosan egybeesik a valódi kód utolsó két jegyével. Továbbá legalább $\lceil 512/22 \rceil = 24$ próba szükséges, ugyanis könnyen kiszámolható, hogy egy kipróbált számhármast 22 potenciális kódot "tesztel" (22 olyan számhármast van, amellyel legalább két helyen megegyezik). A helyes válasz azonban szigorúan 24 és 64 között van.