2. feladatsor

Az angol nyelvű feladatok angolul adandók be.

1. Suppose that a real sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfies $0 < a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ for all $n \ge 1$. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

2. Képzeljünk el egy (jobbra és lefelé) végtelen sakktáblát, amelynek sorai és oszlopai a pozitív egészekkel vannak indexelve. Ki lehet-e tölteni a sakktábla celláit pozitív racionális számokkal úgy, hogy minden pozitív racionális számot pontosan egyszer használunk fel, és a tábla minden sorában és oszlopában a számok összege véges?

3. Legyen $n > k$. Mutassuk meg, hogy ha az $n \times n$-es $A_1, \ldots, A_k$ valós mátrixok mindegyike $(n-1)$-rangú, akkor

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \neq 0.$$

4. Egy 2 méter × 2 méteres négyzet alakú biliárdasztal közepén van egy golyó. A golyót meglökjük, és az az asztal valamelyik sarkánál lévő lyukba megy, miután néhányszor visszapattant az asztal oldalairól. Bizonyítsuk be, hogy a golyó által megtett út hossza méterben mérve *nem* egész szám.

Segítség: Honlapon.

5. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényre teljesül, hogy

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x),$$

ahol $g(x) \ge 0$, minden valós x-re. Bizonyítsuk be, hogy $|f(x)|$ korlátos.

6.$^{+}$ Egy gömbfelületen véletlenszerűen kijelölünk 4 pontot (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül). Mi annak a valószínűsége, hogy a 4 kijelölt pont által meghatározott tetraéder (tehát a 4 pont konvex burka) tartalmazza a gömb középpontját?