0. feladatsor

Ezek nehéz feladatok. Az első óra rendhagyó módon előadás jellegű, ott ismertetem a megoldásukat.

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = a^2 + b^2$$

háromismeretlenes egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok halmazán.

2. Legyen $n \geq 2$, és legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ olyan pontok az n-dimenziós euklideszi térben, amelyek nem esnek egy hipersíkra, és legyen B egy pont szigorúan az $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ pontok konvex burkának belsejében. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\angle A_i B A_j > 90°$ legalább n darab (i, j) párra, ahol $1 \leq i < j \leq n+1$.

3.$^+$ Adott egy tetszőleges $\alpha \in (0, 2\pi)$ szög. Van egy szokásos henger alakú jégkrémtortánk, melynek teteje csokimázzal van borítva, a többi részén pedig nincs csoki. Vágunk egy α szögű (körcikkel leírható) szeletet a tortából, majd fejre fordítjuk, és így tesszük vissza a tortába. (A visszarakott szelet hozzáfagy a többi részhez.) Utána továbbhaladunk az óramutató járásával megegyező irányba, és az előző szelettel szomszédosan (azzal érintkezve) ismét kivágunk egy α szögű szeletet, majd megfordítva visszatesszük. És így tovább, ezt az eljárást folytatjuk a megkezdett irányban; minden szelet a megelőzővel szomszédos. Bizonyítsuk be, hogy véges sok lépés után ismét felül lesz az összes csokimáz.