3. Relációk tulajdonságai

21. Definíció. Legyen A egy tetszőleges halmaz, és a $\sigma \subseteq A^2$ tetszőleges A-n értelmezett reláció.

(1) A σ reláció **reflexív**, ha bármely $a \in A$-ra teljesül, hogy $(a, a) \in \sigma$.
Például a $\varrho =$ „ $\leq$ ” $(\subseteq \mathbb{R}^2)$ reláció reflexív, mert bármely x valós számra teljesül, hogy $(x, x) \in \varrho$, azaz $x \leq x$.

(2) A σ reláció **szimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $(b, a) \in \sigma$.
Például az előbb említett ϱ reláció nem szimmetrikus, mert abból, hogy $3 \leq 4$ (azaz $(3, 4) \in \varrho$), nem következik, hogy $4 \leq 3$ (azaz $(4, 3) \in \varrho$). Az „ $=$ ” reláció már szimmetrikus.

Megjegyzés. Ha már egy ellenpéldát találunk, akkor kész vagyunk, egyetlen ellenpélda is bizonyítja, hogy a tulajdonság nem teljesül.

(3) A σ reláció **tranzitív**, ha bármely $a, b, c \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$, akkor $(a, c) \in \sigma$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván tranzitív, mert ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ is teljesül.

(4) A σ reláció **ekvivalenciareláció**, vagy röviden ekvivalencia, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(5) A σ reláció **antiszimmetrikus**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy ha $(a, b) \in \sigma$ és $(b, a) \in \sigma$, akkor $a = b$.
Például a fenti ϱ reláció nyilván antiszimmetrikus, mert ha $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x \leq y \leq x$, ami azt jelenti, hogy $x = y$.

(6) A σ reláció **részbenrendezés**, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív is egyszerre.

(7) A σ reláció **dichotom**, ha bármely $a, b \in A$-ra teljesül, hogy $(a, b) \in \sigma$ vagy $(b, a) \in \sigma$.
Például a ϱ reláció dichotom, mert bármely két valós számról el tudjuk dönteni, hogy melyik kisebb-egyenlő, mint a másik. A valós számokon értelmezett „ $<$ ” reláció már nem dichotom.

Megjegyzés. Ha egy reláció nem reflexív, akkor dichotom sem lehet. (Gondoljunk bele! A dichotomia definíciójában az a-ról és a b-ről nem tettük fel, hogy különbözőek legyenek.)

(8) A σ reláció **(teljes) rendezés**, ha részbenrendezés és dichotóm is egyszerre.

22. *Megjegyzés.* Ha egy relációt az irányított gráfjával adunk meg, akkor

- σ pontosan akkor reflexív, ha a gráf minden pontjában van hurokél;
- σ pontosan akkor tranzitív, ha teljesül az, hogy ha létezik út két pont között, akkor létezik 1 hosszú út is közöttük;
- σ pontosan akkor szimmetrikus, ha a gráf minden éle oda-vissza típusú él;
- σ pontosan akkor antiszimmetrikus, ha bármely két különböző pont között 0 vagy 1 irányban megy él;
- σ pontosan akkor dichotom, ha a gráf bármely két pontja között megy él.

23. Példa. Legyen σ a következő reláció: $\sigma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 2 \mid x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Milyen tulajdonságok teljesülnek az σ relációra?
Megoldás:

(1) *Reflexivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, x) \in \sigma$, azaz hogy $2 \mid x^2 + x^2$. Ez nyilván teljesül, mert $x^2 + x^2 = 2x^2$, ami nyilván páros, ezért minden egész szám σ-relációban áll egymással. Tehát a reláció reflexív.

(2) *Szimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(y, x) \in \sigma$. Ez nyilván teljesül, mert $(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff 2 \mid y^2 + x^2 \iff (y, x) \in \sigma$, azaz σ szimmetrikus.

(3) *Tranzitivitás:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y, z \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, z) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $(x, z) \in \sigma$. Nézzük meg!
$(x, y) \in \sigma \iff 2 \mid x^2 + y^2 \iff x^2 + y^2 = 2k\ (k \in \mathbb{Z}) \iff x^2 = 2k - y^2$
$(y, z) \in \sigma \iff 2 \mid y^2 + z^2 \iff y^2 + z^2 = 2l\ (l \in \mathbb{Z}) \iff z^2 = 2l - y^2$
Behelyettesítünk: $x^2 + z^2 = 2k + 2l - 2y^2 = 2\,(k + l - y^2) = 2m$, ahol $m \in \mathbb{Z}$. Így megkaptuk, hogy $2 \mid x^2 + z^2$, azaz $(x, z) \in \sigma$. Tehát a reláció tranzitív.

(4) Mind a három fenti tulajdonság teljesül, ezért a reláció *ekvivalencia(reláció)*.

(5) *Antiszimmetria:* Azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$-ból és $(y, x) \in \sigma$-ból következik-e feltétel nélkül, hogy $x = y$. Rendkívül könnyen tudunk ellenpéldát találni, például $(2, 4) \in \sigma$, $(4, 2) \in \sigma$ és $2 \neq 4$.

    Megjegyzés. Nagyon kevés olyan reláció van, ami egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus is, de létezik ilyen, sőt már meg is volt említve egy ilyen reláció. Viszont az sem igaz, hogy egy relációra valamelyik mindig teljesül. Könnyen adható olyan reláció, amelyik se nem antiszimmetrikus, se nem szimmetrikus.

(6) Mivel az antiszimmetria nem teljesül, így α nem *részbenrendezés*, és ezért már *rendezés* sem lehet, de azért nézzük meg az utolsó tulajdonságot is.

(7) *Dichotomia:* Most azt kell vizsgálni, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}$-re teljesül-e, hogy $(x, y) \in \sigma$ vagy $(y, x) \in \sigma$. Nyilván egy páratlan-páros kombináció sem így, sem amúgy nincs benne a relációban, és így megint könnyen találtunk ellenpéldát (egyszerre végtelen sokat is). A reláció tehát nem dichotom.