# 4. Relációk

**1.** Határozzuk meg az alábbi $A$ és $B$ halmazok esetén $A \times B$-t. Ábrázoljuk a kapott halmazt Descartes-féle koordináta-rendszerben.

**a)** $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$
**b)** $A = \{1, 3\}$, $B = [1; 3)$
**c)** $A = (-1; 2]$, $B = [1; 3)$.

**2.** Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és legyenek $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ a következő relációk:

$$\alpha = \{(1,2), (3,2), (3,4), (4,4), (5,5)\} \text{ és } \beta = \{(1,2), (2,2), (3,2), (4,3), (4,5)\}.$$

Határozzuk meg a következő relációkat:

$$\alpha \cap \beta, \quad \alpha \setminus \beta, \quad \alpha^{-1}, \quad \alpha \circ \beta, \quad \beta \circ \alpha, \quad \alpha^{-1} \circ \beta, \quad \beta \cap \alpha^{-1}.$$

**3.** Határozzuk meg az alábbi $\alpha$ és $\beta$ relációk esetén az $\alpha^{-1}$, $\beta \circ \alpha$ és $\alpha \circ \beta$ relációkat. (Az $\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

**a)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : y \text{ az } x \text{ apja}\}$
**b)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2^y\}$
**c)** $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - 1 = 3x\}$.

**4.** Adjuk meg a $H = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\rho = \{(a, b) : a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

**5.** Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy (teljes) rendezés.

**a)** $\{(a, b) : |a - b| \leq 2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**b)** $\{(x, y) : x \leq y\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**c)** $\{(x, y) : x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**d)** $\{(a, b) : ab \geq 0\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**e)** $\{(a, b) : a^2 \geq b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**f)** $\{(x, y) : |x| = |y|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon
**g)** $\{(x, y) : 2 \mid x + y\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon
**h)** $\{(a, b) : 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**i)** $\{(a, b) : a^2 < b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon
**j)** $\{(X, Y) : X \cap \mathbb{Z} = Y \cap \mathbb{Z}\}$ a $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ halmazon

**6.** Döntsük el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az $A$ halmaznak.

**a)** $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$
**b)** $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$
**c)** $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$
**d)** $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$
**e)** $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$
**f)** $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$.

**7.** Adjon meg olyan osztályozást az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon, melynek három osztálya (blokkja) van. Adja meg az osztályozáshoz tartozó ekvivalenciarelációt.

**8.** Határozza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

**a)** $\{(a, b) : ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon

**b)** $\{(a, b) : 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon

**c)** $\{(H, G) : |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon

**d)** $\{(x, y) : x$ és $y$ számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon

**e)** $\{(a, b) : |a| = |b|\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon

**f)** $\{(x, y) : x^2 + y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.