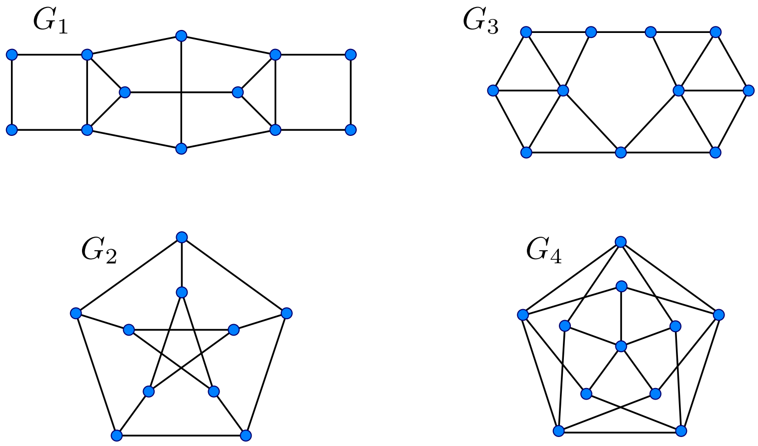
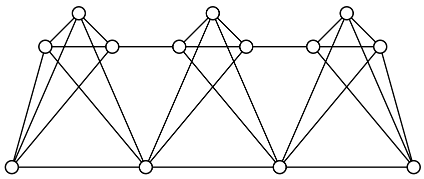
5. Csúcsszínezések, derékbőség, véletlen módszer

1.$^-$ Határozzuk meg az ábrán látható gráfok kromatikus számát:



2.$^-$ Határozzuk meg az alábbi gráf kromatikus számát! Az alsó becslésnél Hajós-konstrukcióval érveljünk.



3. A $KG(n,k)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2k$ esetén $\chi(KG(n,k)) \leq n - 2k + 2$. *Megjegyzés:* Lovász László topológiai érveléssel igazolta, hogy valójában egyenlőség teljesül.

4. (Feladatütemezés.)

a) Egy szállítási cégnél van n elvégzendő feladat. Mindegyik feladathoz tartozik egy időintervallum, amely leírja, hogy a feladat elvégzése mettől meddig tart. Jelölje a k-adik feladathoz tartozó ilyen intervallumot $I_k \subset \mathbb{R}$. Minden feladatot teljes egészében egy munkavállaló végez el, azzal a megkötéssel, hogy az i-edik és a j-edik feladatot nem végezheti ugyanaz a munkavállaló, ha $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ (egyébként elvégezheti). Adjunk meg olyan eljárást, amely az n időintervallum ismeretében a lehető legkevesebb munkavállaló felhasználásával teljesíti a feladatokat.

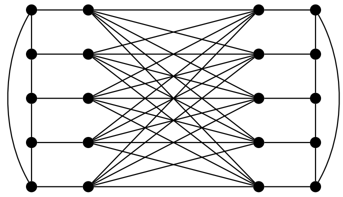
b) Mi köze van ennek a problémának a csúcsszínezésekhez?

5. A Hajós-tételre való hivatkozás nélkül mutassuk meg, hogy minden nem 2-színezhető gráf Hajós-konstruálható K_3-ból.

6. Azt mondjuk, hogy a G gráf k-kritikus, ha $\chi(G) = k$, de bármely valódi H részgráfjára $\chi(H) < k$.

a) Határozzuk meg a 3-kritikus gráfokat! [9.17/a]

b) Valamely páratlan n-re a $K_{n,n}$ teljes páros gráf színosztályait kössük össze egy-egy n pontú körrel az ábrán látható módon. Igazoljuk, hogy a kapott gráf 4-kritikus! [9.17/b]



c) Mutassuk meg, hogy egy k-kritikus gráfban minden pont foka legalább $k-1$.

7. Egy G gráf élhalmaza felbontható három olyan diszjunkt részre, melyek mindegyike páros gráfot alkot. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 8$.

8. Egy G egyszerű gráfban bármely két páratlan kör metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

9.$^-$ Határozzuk meg a Petersen-gráf derékbőségét.

10.$^-$ Mutassuk meg, hogy ha egy k-reguláris gráf derékbősége 4, akkor legalább $2k$ pontja van a gráfnak.

11. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű gráf δ minimális fokszámára $\delta > 2$, akkor a gráf derékbősége legfeljebb $2\log_{\delta-1} n + 2$.

12.$^+$ Egy hatalmas asztalon 2000 pénzérme van (nem feltétlenül egyformák). Néhány ezek közül érinti egymást, de átfedés nincs. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 500 érme úgy, hogy közülük semelyik kettő ne érintse egymást!

13.$^+$ Egy elzárt szigeten felütötte a fejét egy vírus, egy ember megfertőződött. A vírus terjedése a következő: Ha valaki megfertőződik, akkor a következő napon ő maga immúnissá válik a vírusra, egyúttal minden (nem immúnis) ismerősét megfertőzi, az azután következő napon azonban már nem lesz immúnis, újra megfertőződhet. Előfordulhat-e, hogy a vírus soha nem hal ki? (Feltesszük, hogy az „ismeretségek gráfja” állandó.)

14.$^+$ Tegyük fel, hogy G-nek van olyan jó csúcsszínezése, melyben minden szín legalább kétszer előfordul. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek van ilyen színezése $\chi(G)$ színnel is! [9.4]

15. Adott egy V véges halmaz, továbbá V-nek m darab n-elemű részhalmaza: $R_1, \ldots, R_m$. Bizonyítsuk be, hogy ha $m < 2^{n-1}$, akkor V elemeit ki lehet színezni két színnel úgy, hogy mindegyik R_i-ben előforduljon mindkét szín.

16. Bizonyítsuk be, hogy K_n éleit ki lehet színezni úgy két színnel, hogy legfeljebb

$$\binom{n}{a} 2^{1-\binom{a}{2}}$$

monokromatikus K_a részgráf alakul ki.