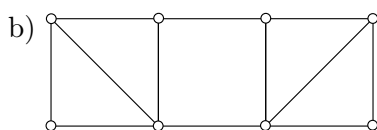
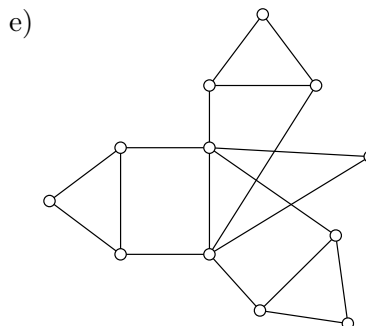
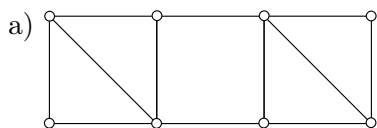


#### 4. PÁROSÍTÁSOK ÁLTALÁNOS GRÁFOKBAN

**Tutte-akadály:** A  $G$  gráfban egy  $X \subset V(G)$  ponthalmazt *Tutte-akadály*nak nevezünk, ha  $c_1(G - X) > |X|$ , ahol  $c_1(G - X)$  a páratlan pontszámú komponensek száma a  $G - X$  gráfban.

**Tutte-tétel:** Egy  $G$  gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha nincs benne Tutte-akadály, azaz ha minden  $X \subset V(G)$ -re  $c_1(G - X) \leq |X|$  teljesül.

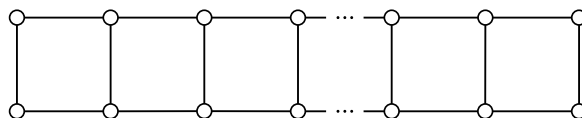
1. Határozzuk meg az alábbi gráfok  $\nu$  és  $\tau$  paramétereinek értékét!



- c) Petersen-gráf
- d)  $k$  mélységű teljes bináris fa.

2. Hány teljes párosítás van

- a)  $K_n$ -ben;
- b)  $K_{n,n}$ -ben;
- c) abban a gráfban, amelyet  $K_{n,n}$ -ből kapunk, ha elhagyjuk egy teljes párosításának éleit;
- d) egy fában;
- e) az alábbi  $2n$  pontú gráfban?



3. Adott egy  $G$  egyszerű gráf, és annak egy  $M$  párosítása.  $M$  nem bővíthető triviálisan, azaz nincs olyan éle  $G$ -nek, amelyet  $M$ -hez hozzá lehetne venni nagyobb párosítást nyerve. (Ilyen  $M$  párosítás könnyen található mohó módon.) Igazoljuk, hogy

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq |M| \leq \nu(G).$$

4. Egy  $2n$  pontú egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább  $n$ . Igazoljuk, hogy létezik teljes párosítás a gráfban! [7.22]

5. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  gráfban az  $M$  párosítás nem maximális élszámú, akkor javítható javító úttal.

6. Legyen  $M_0$  a  $G$  gráf egy párosítása. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van olyan maximális élszámú párosítás, mely lefedi az összes  $M_0$  által lefedett pontot! [7.23]

7. Két játékos egy adott  $G$  egyszerű gráf csúcsain lépked egy bábuval. Mindig az aktuális csúcs valamelyik szomszédjára léphet lépni, de tilos olyan csúcsra lépni, ahol korábban már járt a bábu. A játék kezdőlépése az, hogy az első játékos egy tetszőleges csúcsra leteszi a bábút, majd a második játékos következik, és a fenti szabály szerint felváltva lépnek. Az veszít, aki nem tud lépni. Jellemezzük azokat a gráfokat (gráfelméleti módon), amelyeknél a második játékosnak van nyerő stratégiája!

8. Legyen  $G$  egy összefüggő, egyszerű gráf, páros sok éllel. Tutte tételének felhasználásával mutassuk meg, hogy  $G$  (élhalmaza) előáll 2 hosszú utak (élhalmazának) éldiszjunkt uniójaként!

**9.** Bizonyítsuk be Petersen tételét, mely szerint egy kétszeresen élösszefüggő 3-reguláris gráfban mindig van teljes párosítás! (Egy gráf kétszeresen élösszefüggő, ha összefüggő, és bármely élét elhagyva is összefüggő marad.) [7.29]

*Segítség:* Használjuk a Tutte-tételt.

**10.<sup>+</sup>** Adott egy  $G$  gráf és egy  $f: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$  függvény. Feladatunk annak eldöntése, hogy létezik-e olyan fesztő részgráfja  $G$ -nek, amelyben a  $v$  csúcs fokszáma  $f(v)$  minden  $v$ -re. Vezessük vissza ezt a feladatot egy alkalmas párosítási problémára (amely az Edmonds-algoritmussal hatékonyan megoldható)!