9. Ramsey-elmélet

1. a) Egy versenyen $(m-1)n+1$ ember szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük m ember, akik páronként nem ismerik egymást, vagy van egy ember, aki legalább n másikat ismer.

b) Igaz marad-e az állítás, ha eggyel kevesebb ember vesz részt a versenyen?

2. Egy n pontú teljes gráf ($n \geq 3$) éleit kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan Hamilton-kör, amely teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll.

Következmény: Bárhogy színezzük két színnel K_n éleit, mindig kialakul legalább $n/2$ hosszú monokromatikus út.

3. Bizonyítsuk be, hogy bárhogy színezzük K_6 éleit két színnel, mindig kialakul legalább két monokromatikus háromszög.

4. 17 ember vesz részt egy partin. Közülük bármelyik kettő vagy nem ismeri egymást, vagy jó barátok, vagy utálják egymást. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan ember, akik mind idegenek egymás számára, mind jó barátok, vagy mind utálják egymást.

5. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális?

6. A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges színezés esetén lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és azonos színűek.

7. Az n pontú teljes gráf éleit kiszíneztük n színnel, mindegyik színt felhasználva ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy kialakul „tarka” háromszög, azaz olyan három pontú kör, amelynek 3 éle 3 különböző színt kapott.

8. (Schur-tétel.) Bizonyítsuk be, hogy minden $c \in \mathbb{Z}^+$ számhoz létezik olyan $n = n_c$ természetes szám, hogy bárhogy színezzük ki az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemeit c színnel, az

$$x + y = z$$

egyenletnek lesz egyforma színt kapott számokból álló megoldása az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon.