

7. SÍKGRÁFOK, METSZÉSI SZÁM

Euler-formula: Ha a G összefüggő (szépen lerajzolt) síkgráfnak c csúcsa, e éle, és t tartománya van, akkor $c - e + t = 2$.

1. Egy nemzetközi konferencián egy asztalnál öt különböző ország egy-egy képviselője ül. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Az országok összefüggők.)

2. Mutassuk meg, hogy ha egy konvex poliéderben bármely két csúcs szomszédos, akkor a poliéder egy tetraéder.

3. Legyen G egy Hamilton-körrel rendelkező síkba rajzolt gráf. Bizonyítsuk be, hogy G tartományai 4 színnel jól színezhetők (a négyszíntétel felhasználása nélkül).

4. Mutassuk meg, hogy ha egy síkgráfban minden pont foka páros, akkor tartományai 2 színnel jól színezhetők (tetszőleges síkbarajzolás esetén). [5.26]

5. Egy országban kör alakú autópályákat építettek úgy, hogy semelyik két kör nem érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseiben létesíthetők kétszintű csomópontok úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső illetve alsó szintek változnak! (Egy kereszteződésben pontosan két autópálya találkozik.)

6. Egy síkgráfban minden pont foka páros. Síkba lehet-e úgy rajzolni, hogy a külső tartomány ötszög legyen, a belső tartományok pedig háromszögek? [5.38]

7. Igazoljuk, hogy egy síkgráf minden síkbarajzolásánál ugyanannyi tartomány keletkezik!

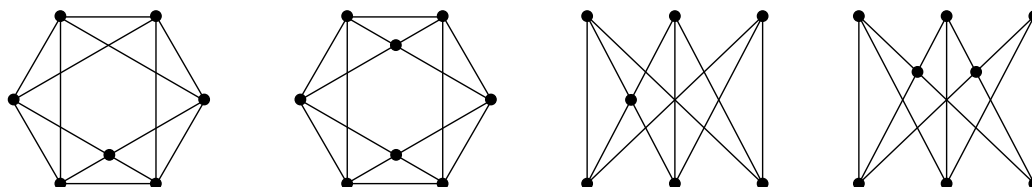
8. Egy 20 csúcsú konvex poliédernek 12 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

9. Igazoljuk a következőket:

- a) Minden egyszerű, legalább 3 pontú G síkgráfra $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.
- b) Minden egyszerű, háromszögmentes, legalább 3 pontú G síkgráfra $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.
- c) Ha a G síkgráfban van kör, és derékbősége legalább g , akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}|V(G)| - \frac{2g}{g-2}$.

10. Igazoljuk, hogy nincs olyan konvex poliéder, amelynek minden lapja hatszög!

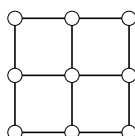
11. a) Határozzuk meg az alábbi gráfok metszési számát!



- b) Határozzuk meg K_6 metszési számát!
- c) Határozzuk meg $K_{4,4}$ metszési számát!
- d) Határozzuk meg a Petersen-gráf metszési számát!

12. Létezik-e olyan 6 pontú gráf, hogy se ő, se a komplementere nem síkbarajzolható?

13. Mutassuk meg, hogy a 3×3 -as négyzetrács-gráfnak van K_4 -minorja.



14. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú egyszerű síkgráf tetszőleges három különböző x, y, z csúcsára

$$d(x) + d(y) + d(z) \leq 2n + 2.$$

15. a) Igaz-e, hogy ha H topologikus részgráfja G -nek, akkor H minorja G -nek?

b) Igaz-e, hogy ha H minorja G -nek, akkor H topologikus részgráfja G -nek?

c)⁺ Síkgráf-karakterizációs tételekre való hivatkozás nélkül bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan akkor minorja $K_{3,3}$ vagy K_5 , ha G -nek topologikus részgráfja $K_{3,3}$ vagy K_5 .