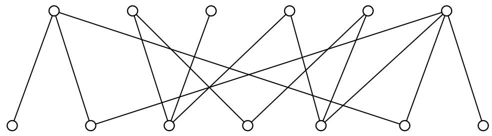
3. Párosítások páros gráfokban (ismétlés)

Kőnig–Hall / Frobenius-tétel. G egy páros gráf A, F színosztályokkal.

a) G-ben akkor és csak akkor van A-t lefedő (azaz A minden pontját párosító) párosítás, ha minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

b) G-ben akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |F|$, és minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$ teljesül.

1. $^{-}$ Határozzuk meg az alábbi gráf ν és τ paramétereinek értékét!



2. A 8×8-as sakktáblán minél több kisnégyzet-átlót szeretnénk behúzni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös pontja (közös végpont se). Legfeljebb hány átló húzható be?

3. G egy egyszerű páros gráf A és F egyenlő méretű színosztályokkal. Bizonyítsuk be, hogy ha G-ben nincs izolált pont és A-ban minden pont fokszáma különböző, akkor G-ben van teljes párosítás!

4. Egy expedíció útra készül. Csomagolás közben észreveszik a következőket: n dobozuk van, és n tárgyat kell még elrakniuk. Minden tárgy maximum egy dobozba nem fér be. Minden dobozba minimum egy tárgy még belefér. Igazoljuk, hogy a csomagolás befejezhető az eddig elcsomagoltak átrendezése nélkül.

5. Igazoljuk, hogy egy d-reguláris páros gráfban létezik teljes párosítás (ha $d \geq 1$).

6. Egy osztályban klubok működnek. Minden klubnak 4 tagja van, és minden tanuló pontosan 3 klubnak tagja. Igazoljuk, hogy lehetséges úgy klubvezetőket választani, hogy senki se legyen több klubnak is vezetője! (A klubvezető mindig a klubtagok közül kerül ki.)

7. Egy $n \times n$-es táblázat első néhány sora ki van töltve az $1, \dots, n$ számokkal oly módon, hogy semelyik sorban és semelyik oszlopban nem fordul elő két azonos szám. Igazoljuk, hogy a hiányzó mezőket ki lehet tölteni úgy (az $1, \dots, n$ számokkal), hogy ez a tulajdonság fennálljon az egész táblázatra.

8. G egy egyszerű páros gráf A és F színosztályokkal, ahol $|A| = |F| = m$. A gráfban minden csúcs foka legalább $m/2$. Igazoljuk, hogy G-ben létezik teljes párosítás!

9. Egy szigeten n család lakik. A Vadászati Minisztérium a szigetet n egyenlő területű vadászati területre osztotta. Ettől függetlenül a Földművelési Minisztérium a szigeten n darab egyenlő területű földművelési területet jelölt ki. Igazoljuk, hogy a Kiutalási Minisztérium szét tudja úgy osztani e területeket a családok között, hogy minden család olyan vadászati és földművelési területet kapjon, amelyeknek van közös része!

10. Egy $n \times n$ méretű, nemnegatív elemeket tartalmazó mátrix minden sorában és minden oszlopában az elemek összege 1. Bizonyítsuk be, hogy ki tudunk jelölni a mátrixban n pozíciót úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy kijelölt pozíció legyen, és a kijelölt pozíciók mindegyikében nem nulla (pozitív) elem álljon. [7.19]
Megjegyzés: A feladat annak igazolását kéri, hogy egy duplán sztochasztikus négyzetes mátrix permanense pozitív.

11. $^{+}$ Igazoljuk, hogy egy $2k$-reguláris gráf élei k színnel színezhetők úgy, hogy az egyszínű élek 2-reguláris feszítő részgráfot alkossanak minden színre! [7.40]

12.$^{+}$ A bűvész és segédje egy trükköt mutatnak be. A bűvész húz 5 lapot a nézők által összekevert 52 lapos franciakártya-pakliból, megnézi őket, majd négyet közülük valamilyen sorrendben egyesével felfed. A segéd a látottak alapján kitalálja, hogy mi az ötödik lap.

a) Mutassuk meg, hogy *létezik* olyan stratégia, amellyel ez a bűvésztrükk megvalósítható! (A stratégiát a bűvész és a segéd természetesen előre megbeszélik.)

b) Adjunk meg egy konkrét stratégiát!