1. Fokszámok (ismétlés)

1.$^-$ Létezik-e olyan gráf, amelynek fokszámsorozata

a) $1, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 9$

b) $1, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8$?

2. (Havel–Hakimi-algoritmus.) Az előadáson tanult tétel segítségével döntsük el, hogy létezik-e olyan *egyszerű* gráf, amelynek fokszámsorozata

a) $0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 7$

b) $2, 2, 3, 5, 6, 6, 6, 8, 8$.

3. Létezik-e olyan *összefüggő* gráf, amelynek fokszámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?

4. Létezik-e olyan *páros* gráf, amelynek fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$?

5. Mutassuk meg, hogy pontosan akkor létezik n pontú k-reguláris *egyszerű* gráf, ha kn páros és $k \leq n - 1$. [5.2]

6.$^-$ Egy sakkversenyen 10 nő és 20 férfi vett részt. A verseny folyamán minden nő 6 játszmát játszott, és összesen 34 olyan sakkjátszma volt, amelyben egy férfi és egy nő mérkőzött meg egymással. Hány olyan játszma volt, amelyben mindkét fél nő volt?

7. Mutassuk meg, hogy egy $2n$ csúcsú G gráf pontosan akkor reguláris, ha minden olyan $A \dot\cup B = V(G)$ csúcspartícionálásra, melyre $|A| = |B| = n$, a $G|_A$ gráfnak ugyanannyi éle van, mint $G|_B$-nek.

8. Az **Erdős–Gallai-tétel** szerint a nemnegatív egészekből álló $d_1, \ldots, d_n$ monoton növő sorozat pontosan akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_1 + \cdots + d_n \text{ páros,} \quad \text{és}$$

$$\sum_{i=n-k+1}^{n} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=1}^{n-k} \min(d_i, k), \quad \text{minden } k \in \{1, \ldots, n\}\text{-re.}$$

Bizonyítsuk be a feltételek szükségességét.

9.$^-$ Igazoljuk, hogy ha egy G egyszerű gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz legalább $\delta(G) + 1$ hosszú kört.

10. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráfban minden pont foka legalább 3, akkor a gráf tartalmaz páros kört. [10.2]

11. Egy gráf minden foka páros. Igazoljuk hogy lehet úgy irányítani, hogy minden csúcsban ugyanakkora kifok alakuljon ki, mint befok.

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból alkalmas élek elhagyásával olyan páros gráfot kaphatunk, melyben minden csúcs foka legalább az eredeti fokszámának fele.
Következmény (BSc): Tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával.

13. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával. Természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

14.$^+$ Egy G gráfban a fokszámok átlaga $\bar{d}(G)$. Igazoljuk, hogy G-nek van olyan F feszített részgráfja, melyre $\delta(F) \geq \frac{\bar{d}(G)}{2}$.

15.$^+$ Legyen $n \geq 1$ pozitív egész, és $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ pozitív egészek. Egy $t_n + 1$ tagú társaság tagjai lejátszanak néhány sakkpartit úgy, hogy két ember egymással legfeljebb egyszer játszhat. Igazoljuk, hogy teljesülhet egyszerre az alábbi két feltétel:

(i) A társaság minden egyes tagja által lejátszott partik száma a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ számok egyike.

(ii) Minden i-re, ahol $1 \leq i \leq n$, van valaki, aki pontosan t_i sakkpartit játszott le.