

4. feladatsor – Komplex számok, Polinomok

4.1. Feladat. Kanonikus alakban számolva határozzuk meg az alábbi műveletek végeredményét.

- a) $i^{2011}; i^{-22};$
- b) $(3 + 5i)(2 - 7i);$
- c) $(-6 + 9i + 4 - 8i) \cdot i;$
- d) $\frac{-7-i}{1+4i};$
- e) $\frac{1+3i}{3+2i};$
- f) $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}.$

4.2. Feladat. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán.

- a) $(1 - 3i)z = 2 + 5i;$
- b) $(3 + 4i)z + (1 + 2i) = 14 + 11i;$
- c) $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6;$
- d) $z^2 + 6\bar{z} = |z|^2 + 16;$
- e) $i\bar{z} = z^2.$

4.3. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írjuk át trigonometrikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon.

- a) 3;
- b) $-5;$
- c) $i;$
- d) $-8i;$
- e) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i;$
- f) $2 - 2\sqrt{3}i;$
- g) $-\sqrt{3} - i.$

4.4. Feladat. Az alábbi trigonometrikus alakban adott komplex számokat írjuk át kanonikus alakba, és ábrázoljuk azokat a Gauss-féle számsíkon.

- a) $2(\cos 0 + i \sin 0);$
- b) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4});$
- c) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6};$
- d) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}).$

4.5. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozzuk meg az alábbi műveletek eredményét.

- a) $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i);$
- b) $\frac{1-i}{1+i};$
- c) $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)};$
- d) $(\sqrt{3} - i)^{67};$
- e) $(1 + i)^{1222};$
- f) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}.$

4.6. Feladat. Adjuk meg trigonometrikus és kanonikus alakban a következő gyökvonások eredményét.

- a) $\sqrt[4]{-16}$;
- b) $\sqrt[3]{-8}$;
- c) $\sqrt[4]{i}$;
- d) $\sqrt[6]{64}$;
- e) $\sqrt[3]{-8i}$;
- f) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$.

4.7. Feladat. Ábrázoljuk Gauss-számsíkon a

- a) harmadik;
- b) negyedik;
- c) hatodik;
- d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsuk meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök.

4.8. Feladat. Határozzuk meg a következő polinomok gyökeit. Adjuk meg a gyöktényezősz felbontásukat is.

- a) $x^2 + 6x + 10$;
- b) $x^2 - (4 - 2i)x + 11 + 2i$;
- c) $2x^3 + 16i$;
- d) $x^4 + 4$;
- e) $x^4 + 1 + \sqrt{3}i$.

4.9. Feladat. Osszuk el maradékosan az f polinomot a g polinommal.

- a) $f = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 5$, $g = x + 1$;
- b) $f = x^5 + 5x^4 + 7x^3 + x^2 - 3x - 2$, $g = x^2 + 2x + 1$;
- c) $f = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 9x + 3$, $g = 2x^2 - 4x + 2$.

4.10. Feladat. Határozzuk meg a f és a g polinomok legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmus segítségével a racionális együtthatós polinomok körében.

- a) $f = 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $g = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$;
- b) $f = -x^4 - 4x^3 + 34x^2 + 76x - 105$, $g = x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 6x - 7$;
- c) $f = x^8 - 3x + 2$, $g = x^7 + 4x^6 + x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 5x + 5$.