2. feladatsor – Relációk

2.1. Feladat. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és $\alpha, \beta \subseteq A \times A$ relációk, melyekre $\alpha = \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}$ és $\beta = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3), (4, 5)\}$. Határozzuk meg a következő relációkat:

$$\alpha^{-1}, \qquad \alpha\beta, \qquad \beta\alpha, \qquad \beta\alpha^{-1}, \qquad \alpha\beta^{-1}.$$

2.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi α és β relációk esetén az α^{-1}, $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ relációkat. ($\mathbb{E}$ az emberek halmazát jelöli.)

a) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon x \text{ az } y \text{ gyermeke}\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \colon\ y \text{ az } x \text{ apja}\}$;
b) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = 2y\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ x = 2^y\}$;
c) $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\}$, $\beta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ y - 1 = 3x\}$.

2.3. Feladat. Adjunk meg a gráfjával az $A = \{a, b, c, d\}$ halmazon egy olyan relációt, amely

a) reflexív, tranzitív, de nem szimmetrikus;
b) antiszimmetrikus, tranzitív, de nem dichotom;
c) dichotom, de nem reflexív.

2.4. Feladat. Adjuk meg az $A = \{-2, 1, 2, 3, 4\}$ halmazon értelmezett $\varrho = \{(a, b) \colon a \text{ osztója } b\text{-nek}\}$ reláció gráfját. Vizsgáljuk meg reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából.

2.5. Feladat. Vizsgáljuk meg az alábbi relációkat reflexivitás, szimmetria, antiszimmetria, tranzitivitás és dichotómia szempontjából. Ezek alapján állapítsuk meg, hogy melyik reláció ekvivalencia, részbenrendezés vagy rendezés.

a) $\{(x, y) \colon x \le y\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
b) $\{(x, y) \colon x < y\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
c) $\{(a, b) \colon |a - b| \le 2\}$ az $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon;
d) $\{(a, b) \colon ab \ge 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \}$
e) $\{(a, b) \colon a^2 \le b^2\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon;
f) $\{(x, y) \colon |x| = |y|\}$ az $\mathbb{R}$ halmazon;
g) $\{(x, y) \colon 2 \mid x + y\}$ az $\mathbb{N}$ halmazon;
h) $\{(a, b) \colon 4 \mid b - a\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.

2.6. Feladat. Döntse el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak:

a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$;
b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$;
c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$;
d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$;
e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$;
f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$.

2.7. Feladat. Harározza meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

a) $\{(a, b) \colon ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \}$ halmazon;
b) $\{(a, b) \colon 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon;
c) $\{(H, G) \colon |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon;

d) $\{(x,y)\colon x$-nek és y-nak van közös prímosztója$\}$ az $A=\{2,3,8,9,14,15,19,26\}$ halmazon;
e) $\{(x,y)\colon x$ és y számjegyeinek összege egyenlő$\}$ az $A=\{71,301,216,4,121,54,602,315\}$ halmazon;
f) $\{(x,y)\colon x^2+y^2$ páros$\}$ a $\mathbb{Z}$ halmazon.

2.8. Feladat. Adja meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

a) $(A;\subseteq)$, ahol $A=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$;
b) $(B;\subseteq)$, ahol $B=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$;
c) $(C;|)$, ahol $C=\{2,3,4,5,6,12,24,36\}$;
d) $(D;\sqsubseteq)$, ahol $D=\{123,211,321,467,512,861,999\}$, és $a\sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye.