1. feladatsor – Halmazok

1.1. Feladat. Legyen az alaphalmaz $U = \{a, b, c, d, e\}$, tekintsük a következő halmazokat: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{d, e\}$ és $C = \{a, b, e\}$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B, \quad A \vartriangle B, \quad (A \vartriangle \overline{C}) \setminus \overline{B}, \quad P(B).$$

1.2. Feladat. Legyen $A = \mathcal{P}(\{a, b\})$ és $B = \mathcal{P}(\{b, c\})$. Határozzuk meg a következő halmazok elemeit:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \vartriangle B.$$

1.3. Feladat. Legyen $A = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz:
a) $\emptyset \in A$, **b)** $\emptyset \subseteq A$, **c)** $\{\emptyset\} \in A$, **d)** $\{\emptyset\} \subseteq A$, **e)** $\{\{\emptyset\}\} \in A$,
f) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$, **g)** $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \in A$, **h)** $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \subseteq A$.

1.4. Feladat. Határozzuk meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

1.5. Feladat. Döntsük el, hogy teljesülnek-e tetszőleges A, B, C halmazok esetén a következő egyenlőségek.
a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;
b) $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$;
c) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
e) $A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)$;
f) $(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B$;
g) $(A \vartriangle B) \vartriangle (A \cap B) = A \cup B$.

1.6. Feladat. Határozzuk meg az alábbi A és B halmazok esetén $A \times B$-t. Koordinátarendszerben is ábrázoljuk a Descartes-szorzatot.
a) $A = \{1, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$;
b) $A = (-1; 2]$, $B = [1; 3)$.

1.7. Feladat. Adjuk meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

1.8. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$:

$$A \subseteq B, \qquad A = B, \qquad B \setminus A = \emptyset.$$

1.9. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül , hogy
a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)$;
b) $(A \cap C) \setminus \big(B \setminus (C \cup D)\big) \supseteq (A \cap C \cap D)$.

1.10. Feladat. Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen A és B az U univerzum részhalmaza, és legyen $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$. Igazoljuk, hogy $\overline{A} = A \sqcap A$ és $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$. Hogyan fejezhető ki az egyesítés a $\sqcap$ művelet segítségével?