2. Generátorfüggvények alkalmazása

1.$^-$ Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $0\binom{n}{0}+1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$.

b) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$.

2. Az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaznak hány
  a)$^-$ páros;
  b)$^+$ 3-mal osztható;
  c)$^+$ 4-gyel osztható
elemszámú részhalmaza van?

3.$^+$ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége
  a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),
  b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),
  c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?
Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2018 számból húzunk 100-at).

4. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1,2,\ldots,n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1,n+2,\ldots,2n$ multiplicitásai párosak?

5.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1\ldots c_k=\binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1+\cdots+c_k=n$.

6. Igazoljuk, hogy ha $n\geq 2$, akkor az $[n]$ halmaznak ugyanannyi páros permutációja van, mint páratlan. (Egy permutációt párosnak nevezünk, ha az inverziószáma páros, illetve páratlannak, ha az inverziószáma páratlan.)

7. Igazoljuk, hogy ha $n\geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

8. Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?

9. Bizonyítsuk be a Newton-formula segítségével, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}x^n.$$

10. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n.$$

11.$^+$ Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}C_{2k}C_{2n-2k}=4^nC_n,$$

ahol C_n az n-edik Catalan-számot jelöli, azaz $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.