Vizsgatematika

Nevezetes numerikus sorok
2019-2020. I. félév
(Matematika Bsc, matematika tanár)

A) Definíciók, tételek (bizonyítás nélkül). (A jegyzetben mind megtalálható) (Oldalszám feltüntetve.)

Végtelen sor konvergenciája, divergenciája. (5.)
Geometriai sor konvergenciája, divergenciája. (6.)
A Cauchy-féle konvergencia-kritérium sorokra. (23.)
A harmonikus sor divergenciája. (22.)
A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája; összege. (45., 46., 54.)
Abszolút konvergencia, feltételes konvergencia. (30., 31.) Leibniz kritérium. (34.) Dirichlet-kritérium (40)
Abszolút ill. feltételes konvergencia és az átrendezés (mindkét tétel). (37.) Abszolút konvergens sor részsorokra bontására vonatkozó tétel.(30.)
Pozitív tagú sorokra vonatkozó konvergenciakritériumok (majoráns, minoráns, gyök-, hányados-, integrál-kritériumok legalább egy alakja). (33., 19; 20. 24.)
Hatványsorok definíciója, konvergencia-sugár (76.)
Hatványsor összegfüggvényének tulajdonságai (folytonosság, differenciálhatóság, integrálhatóság.) (80, 81) Abel-tétele (80)
Taylor sor; nevezetes Taylor-sorok $(e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha)$. (102, 103)
A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája (62., 63)
Az e szám definíciója; irracionalitása; végtelen sor előállítása.(67.-71.)
A $\sqrt{2}$ előállítása a binomiális sorral. (80.)
A πelőállítása az $\operatorname{arctg} x$ sorának, ill. az $\arcsin x$ sorának segítségével. (81., 83.)
A π irracionalitása. (87.)
A Liouville-szám; transzcendens volta. (90., 91)

B) Tételek bizonyítással együtt
[A bizonyítások az előadáson elhangzanak, vagy a jegyzetből megtanulhatók.].

A geometriai sor konvergenciája. (6.)
A geometriai sor alkalmazásai (a végtelen tizedestörtek; Koch-féle hópehely.) (11.)
A harmonikus sor divergenciája (legalább 3 féle bizonyítás). (22.)

A harmonikus sorral kapcsolatos néhány érdekesség (*részletösszegei nem egészek*; egy adott számjegyet tartalmazó tagok elhagyásával kapott sor konvergens). (27., 28.)
A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ sor konvergenciája, összege; egy átrendezése. (34., 36.)
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ sor konvergenciája. (39.)
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor konvergenciája (legalább 3 féle bizonyítás). (46.)
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ bizonyítása. (53., 54.)
A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ sor konvergenciája. (59.)
A prímszámok reciprokaiból álló sor divergenciája. (63.)
Az $e=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ bizonyítása. (68.)
Az e irracionalitásának bizonyítása. (70.)

C) Példák (Többségük az előadáson kerül megoldásra, ill. megtalálhatók kidolgozva a jegyzetben).

1. A $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ sor "összegei" (3.)
2. A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ sor összege. (14.)
3. A $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ sor összege. (18.)
4. $\sum_{p,q=0}^{\infty}\frac{1}{2^p5^q}=2,5$ bizonyítása. (29.)
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log_2^p n}$ divergenciája $(p\le 1)$; konvergenciája $(p>1)$. (61.)
6. $\sum_{|}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$ konverges; abszolút konvergencia. (137.)
7. Bizonyítsuk be, hogy van két szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 prímszám esik. (64.)
8. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét:
   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+10}$; c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; (125., 126., 128., 129.)
   d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{(2n)!}$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(2n)!}$
9. Bizonyítsa be, hogy a következő sorok konvergensek:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$. (139., 141.)
10. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$ sor? (140.)

Jegyzet: Németh József: Előadások a végtelen sorokról (Polygon 2002)

Szeged, 2019. 09.04.

Németh József