

Végtelen sorok
(Kutatók éjszakája, 2013. szept. 27.)

Dr. Németh József
SZTE TTIK Bolyai Intézet
Analízis Tanszék
<http://www.math.u-szeged.hu/~nemethj>

Háttéranyag:
Németh József: Előadások a végtelen sorokról
(Polygon, Szeged, 2002)

A végtelen Ellentmondásos; vitatott, misztikus

”Mindig nagy falatnak tűnt”

”Megosztotta a matematikusokat” (Kelle? Dobjuk el!)

”A végtelent legjobb elkerülni” (Galilei)

”Ősidők óta semmi sem kavarja fel annyira az emberi értelmet, mint a végtelen kérdése” (Hilbert)

Példa (ellentmondás)

Galilei-féle paradoxon:

$$1 \leftrightarrow 2$$

$$2 \leftrightarrow 4$$

$$3 \leftrightarrow 6$$

⋮

(kölcönösen egyértelmű, akkor ”ugyanannyi” elem, Kalmár-lovasok)

Végtelen összegek

a) "Csoki"

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots = ?$

α) TORTA

β)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots = A \\ \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{1}{3}A \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}A \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2 + 2^2 + \cdots = A \\ 2 + 2^2 + \cdots = 2A \end{array} \right\} \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

d) $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = A$ (Leibniz)

α) $A = 0$

4

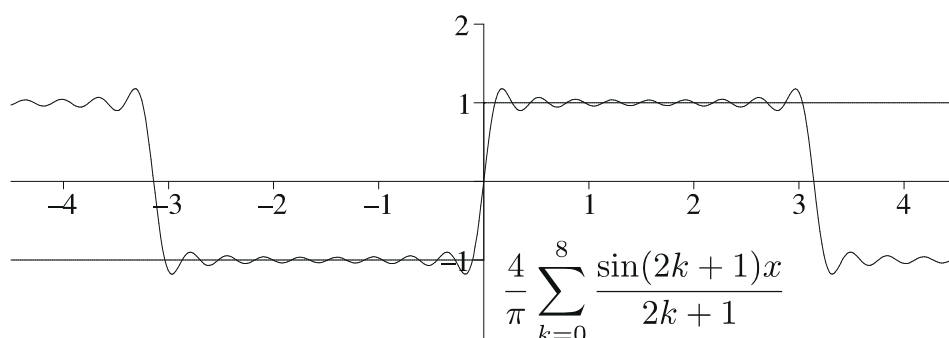
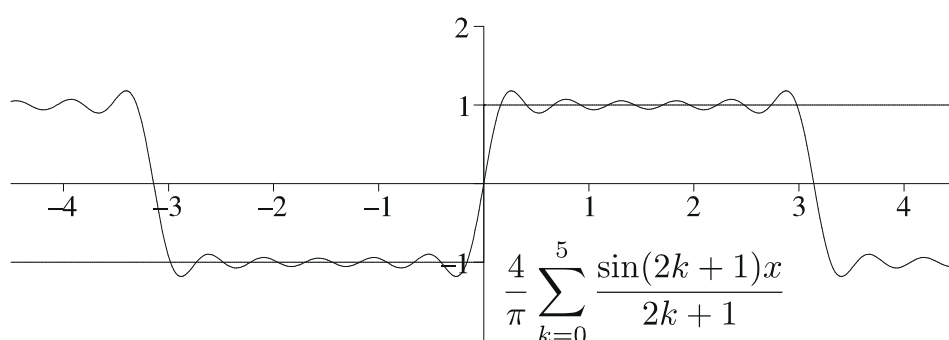
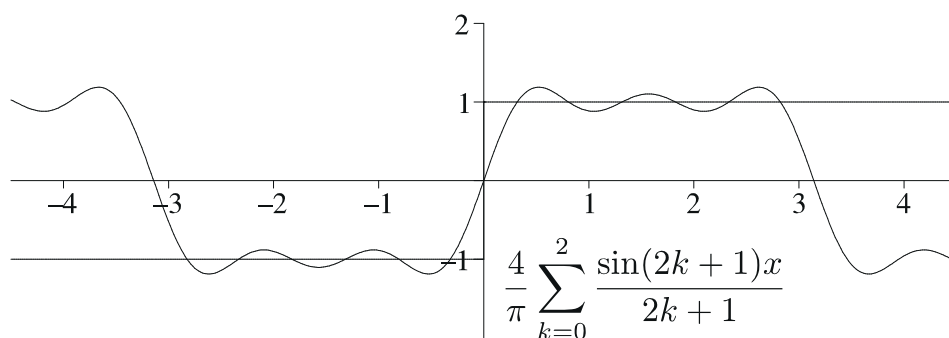
$$\beta) A = 1$$

$$\gamma) A = \frac{1}{2}$$

$$\delta) \frac{1-x}{1-x^3} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - \dots$$
$$\underbrace{\frac{1}{1+x+x^2}}_{1} \dots \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$e) \operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right) \text{ (Fourier 1807)}$$

(Dobjuk el!!) [Euler, D'Alembert, Lagrange, Cauchy (**biz.**)]



(Vessük el a végtelent!)

Definíció. $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \stackrel{?}{=} A$
 $s_n = a_1 + \dots + a_n \rightarrow A$, akkor a

6

végtelen sok szám összegén A -t értjük.

Pl.:

1) "CSOKI":

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1. \end{aligned}$$

2) "TORTA":

$$s_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{0 - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Mértani sor: $1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $|q| < 1$,
hiszen $s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

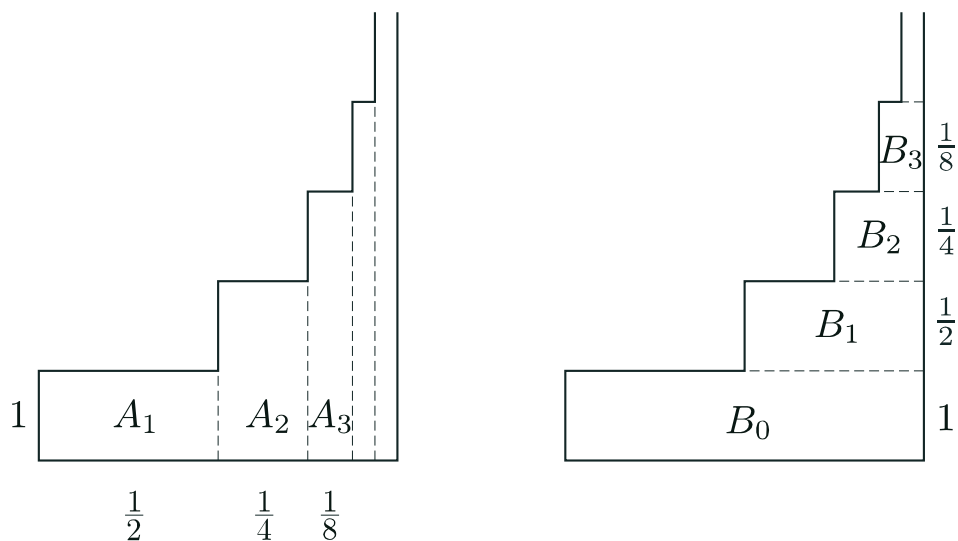
- 3) $1 + 2 + 2^3 + \dots$ esetén $s_n = 1 + 2 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \rightarrow \infty$.
- 4) $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ esetén $s_1 = 1, s_2 = 0, s_3 = 1, s_4 = 0, \dots$, így s_n nem "tart" egy számhoz sem, azaz nincs összege ennek a végtelen sok számnak.
- 5) Fourier sora is OK, hiszen lehet olyan,

8

hogy folytonos függvényekből álló végtelen sor összege nem folytonos. (**Biz.:** XIX. sz. második felében) (Dirichlet, Abel)

Egy további érdekes összeg: $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$

(Swineshead; XIV. század; fizika, valószínűség).



Bontsuk fel a sort a következőképpen:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 \\ \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{2^2} \\ \vdots \end{array}$$

Megjegyzés: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1000n}{1,06^n} \approx ?$

$$\frac{1000}{1,06} + \frac{1000 \cdot 2}{1,06^2} + \frac{1000 \cdot 3}{1,06^3} + \dots$$

Néhány további érdekes összeg:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = ?$

(harmonikus sor)

10

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{83} > 5$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{227} > 6$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{33617} > 11$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{248397} > 13$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1,5 \cdot 10^{43}} > 100$$

Lassú (példa)

$$\begin{array}{rcl}
1 + \frac{1}{2} & = & 1 + \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & \geq & 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} & \geq & 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} & \geq & 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} & \geq & 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{33} + \cdots + \frac{1}{64} & \geq & 32 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{2} \\
+ \frac{1}{65} + \cdots + \frac{1}{128} & \geq & 64 \cdot \frac{1}{128} = \frac{1}{2} \\
& \vdots & \vdots
\end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Belátható:

12

$$\alpha) \sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} < 80.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{9 \notin n}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor konvergens.

Megoldás. Írjuk fel az új sor néhány tagját részletesen.

$$\begin{aligned} \sum_{9 \notin n} \frac{1}{n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{88}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{888}\right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{10^k} + \dots + \underbrace{\frac{1}{8 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 8}}_{(k+1)\text{-szer}}\right) + \dots \end{aligned}$$

Végezzük el a következő felső becsléseket:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} &\leq 1 + 1 + \cdots + 1 = 8, \\
\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{88} &\leq \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10} = 8 \cdot 9 \cdot \frac{1}{10}, \\
&\vdots \\
\frac{1}{10^k} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{8 \cdot 8 \cdots 8}}_{(k+1)\text{-szer}} &\leq 8 \cdot 9^k \cdot \frac{1}{10^k}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{9 \nmid n} \frac{1}{n} &< 8 \cdot 9^0 \cdot \frac{1}{10^0} + \cdots + 8 \left(\frac{9}{10}\right)^k + \cdots = \\
&= 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 80,
\end{aligned}$$

tehát a sor valóban konvergens.

14

Megjegyzés. A 9 helyett bármely számjegy vehető.

β) s_n ($n > 1$) soha sem egész szám.

Tegyük fel, hogy van olyan $n > 1$, hogy

$$(*) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = A,$$

ahol $A \in \mathbb{N}^+$.

Legyen 2^r a legnagyobb paritású tag az $1, 2, \dots, n$ számok között. Ekkor $(*)$ a következő alakban írható:

$$(**) \quad \frac{u}{2^s \cdot v} + \frac{1}{2^r} = A,$$

ahol v páratlan és $r > s$ (mivel r volt a maximális paritás).

Szorozzuk be $(**)$ mindkét oldalát 2^s .

v -vel, akkor az adódik, hogy

$$u + \frac{v}{2^{r-s}} = A \cdot 2^s \cdot v,$$

ami ellentmondás, mert a bal oldal első tagja egész, a második pedig nem, így összegük nem adhatja ki a jobb oldalon álló egész számot. Tehát a részletösszegek nem adhatnak egész számot ($n > 1$) esetben).

$$\gamma) 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = 2,5$$

(HF)

Mi a helyzet, ha váltakozik az előjel?

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = ?$$

- 1) Az összeg: $A = \log_e 2$ (ld. könyv; 2 megoldás)

16

2) Átrendezés (újabb sokk)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + = A$$

$$0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + = A$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + = \frac{A}{2}$$

(1) + (3) :

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + = \frac{3}{2}A$$

\Rightarrow

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + = \frac{3}{2}A \neq A.$$

Tetszőleges számhoz átrendezhető.

(Riemann tétele; abszolút konvergencia)

Még egy érdekesség:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \log_e \sqrt[3]{2} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Kérdés: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergens-e? Mi az összege?

Kérdés: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergens-e? Mi az összege? (Dirichlet-kritérium)

Dirichlet-kritérium: Ha $a_n \downarrow 0$ és a $B_n = b_1 + \dots + b_n$ sorozat korlátos, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad \text{konvergens}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_m^n a_k b_k \right| &= \left| \sum_m^n a_k (B_k - B_{k-1}) \right| = \\
&= \left| \sum_m^n a_k B_k - \sum_{m-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \right| = \\
&= \left| \sum_m^{n-1} B_k (a_k - a_{k+1}) - a_m B_{m-1} + a_n B_n \right| \leq \\
&\leq K(a_m - a_n) + K a_m + K a_n \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

azaz a sor konvergens.

Másrészt:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n| \leq K,$$

így $a_n = \frac{1}{n}$ és $b_n = \sin n$ szereposztással:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n \quad \text{sor konvergens.}$$

(Összeg=? Fourier)

Kérdés: Abszolút konvergens-e? (HF)

$$\text{b) } 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Van véges összeg:

$$1) \quad s_n < 2$$

Alkalmazzuk az alábbi becslést:

(*)

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n},$$

majd az egyes tagokat bontsuk fel törtek különbségére az alábbi módon:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \cdots,$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Így (*) jobb oldala helyett az írható, hogy

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n},$$

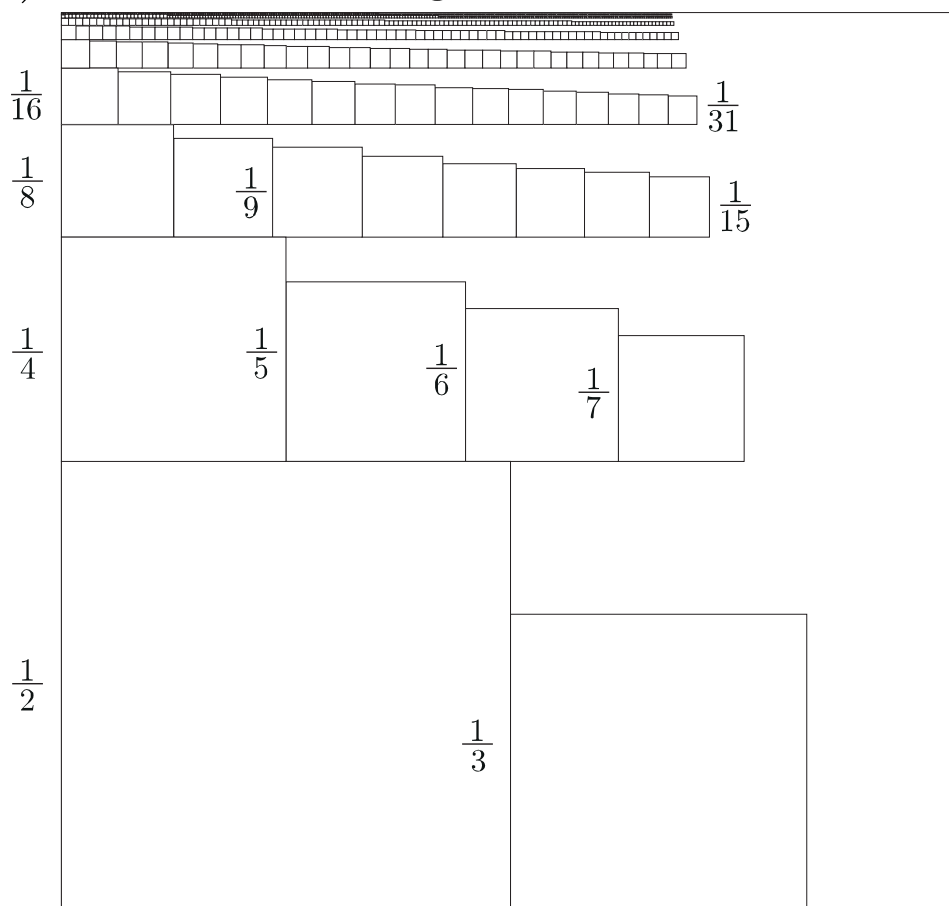
hiszen a közbülső tagok kiesnek, ugyanis ez egy teleszkópikus összeg. Azt kapjuk,

hogy

$$s_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

Versenypélda: $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$.

2) Geometriai megoldás



22

Mekkora az összeg?

1689 (Jacob Bernoulli) tűzte ki (Baseli probléma)

Euler 1734

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = ?$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100} = 1,54977$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10000} = 1,63498$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{1000000} = 1,64393$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = 1,64493406684822643647 \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} \rightarrow 10 \text{ év}$$

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (elemi bizonyítás a könyvben: $\sin mx = \dots$; Viete formulák n -edfokú egyenletre)

Johann Bernoulli: "Bárcsak a bátyám megérhette volna."

Euler memóriája: Vergilius: Aeneasz (580 oldal)

Euler (hiányos)

$$\begin{aligned} \sin mx &= \binom{m}{1} \sin x \cos^{m-1} x - \\ &\quad - \binom{m}{3} \sin^3 x \cos^{m-3} x + \dots \end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin \left(n \cdot \frac{x}{n} \right) = \\ &= \underbrace{\binom{n}{1} \sin \frac{x}{n} \cos^{n-1} \frac{x}{n}}_{\downarrow x} - \underbrace{\binom{n}{3} \sin^3 \frac{x}{n} \cos^{n-3} \frac{x}{n}}_{\downarrow \frac{x^3}{3!}} + \dots \\ \Rightarrow \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (*)\end{aligned}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}P(x) &= A(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n) \Leftrightarrow \\ &= B \left(1 - \frac{x}{r_1} \right) \left(1 - \frac{x}{r_2} \right) \cdots \left(1 - \frac{x}{r_n} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdots \\ \Rightarrow \frac{1}{3!} &= \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9 \cdot \pi^2} - \cdots \\ \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \end{aligned}$$

További összegek (Euler)

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots &= \frac{2^0}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{1} \pi^2 \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots &= \frac{2^2}{5!} \frac{1}{3} \pi^4 \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots &= \frac{2^4}{7!} \frac{1}{3} \pi^6 \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \dots &= \frac{2^6}{9!} \frac{3}{5} \pi^8 \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \dots &= \frac{2^8}{11!} \frac{5}{3} \pi^{10} \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \dots &= \frac{2^{10}}{13!} \frac{691}{105} \pi^{12} \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \dots &= \frac{2^{12}}{15!} \frac{35}{1} \pi^{14}
\end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \dots = \frac{2^{14}}{17!} \frac{3617}{15} \pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \dots = \frac{2^{16}}{19!} \frac{43867}{21} \pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \dots = \frac{2^{18}}{21!} \frac{1222277}{55} \pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \dots = \frac{2^{20}}{23!} \frac{854513}{3} \pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \dots = \frac{2^{22}}{25!} \frac{1181820455}{273} \pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \dots = \frac{2^{24}}{27!} \frac{76977927}{1} \pi^{26}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (?) (Apery)

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens vagy divergens?

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{4^3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \dots \leq \\
& \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{2^3}} + \frac{4}{\sqrt{4^3}} + \frac{8}{\sqrt{8^3}} + \dots = \\
& = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{8}} + \dots = \\
& = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \dots = \\
& = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ (geometriai sor)}
\end{aligned}$$

e) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots = \infty$ (ld. könyv; oszthatóság;

harmonikus sor)

Megjegyzés: "Annyi prímszám van, ahány szám vagy ahány négyzetszám?" Gauss, Erdős; 79.000-1000.

Prímszámok a négyzetszámok között.

Mutassuk meg, hogy van két olyan szomszédos négyzetszám, amelyek közé legalább 10^6 db prímszám esik.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz minden n természetes szám esetén n^2 és $(n+1)^2$ közé kevesebb, mint 10^6 db prímszám esik.

Jelölje $p_1^{(n)}, \dots, p_{s_n}^{(n)}$ ezeket a prímszámokat. Ekkor tehát $s_n < 10^6$ teljesül minden n esetén. Nyilvánvaló, hogy ekkor

$$\frac{10^6}{n^2} > \frac{1}{p_1^{(n)}} + \frac{1}{p_2^{(n)}} + \dots + \frac{1}{p_{s_n}^{(n)}}.$$

Viszont, ha mindkét oldalt összegezzük, adódik, hogy

$$10^6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n},$$

ahol a jobb oldali összegben az összes prímszám reciprok összege van. Ez nyilvánvaló, hogy ellentmondás, mert a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ sor pedig divergens, mégpedig úgy, hogy (pozitív tagú lévén) a részletösszegek tartanak a végtelenbe. Azaz eredeti állításunk valóban igaz.

A végtelen összegek "haszna"

$\alpha)$ $0, \dot{1}3 = \dots$ (mértani sor: $a = \frac{13}{100}$; $q =$

$$\frac{1}{100})$$

$\beta)$ $\sqrt{2} \approx 1,41 \dots$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots + x^n.$$

$$n \rightarrow \frac{1}{2} \text{ (NEWTON)}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{2}}{2}}{2!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{2}}{2} \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!}x^k + \dots$$

$$x = 1$$

32

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

(irracionális; Hyppasos)

γ) $\pi \approx 3,14\dots$

i.e.	2000 (<i>B</i>)	3, 125
	(<i>E</i>)	3, 16
	250 (<i>A</i>)	3, 1418
i.sz.	263 :	5 tizedesjegy
	480 :	7
	1429 :	14
	1610 :	35 (<i>LudolfVanCeulen</i>)
	1719 :	112
	1847 :	152
	1874 :	527
	1973 :	1 001 250
	1987 :	134 217 700
	2002 :	1 240 000 000 000
	2010 :	5 000 000 000 000
	2012 :	10 000 000 000 000

FRANÇOIS VIÈTE (kb. 1579):

34

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

JOHN WALLIS (kb. 1650):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

WILLIAM BROUNCKER (kb. 1650):

$$\pi = \frac{4}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \cdots}}}}$$

MADHAVA, JAMES GREGORY, GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1450–1671):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

(lassú, de szép; Newton; biz. a könyvben)

ISAAC NEWTON (kb. 1666):

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right).$$

SRINIVASA RAMANUJAN (1914):

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42n + 5}{2^{12n+4}}.$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)! [1103 + 26390n]}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

DAVID CHUDNOVSKY és GREGORY
CHUDNOVSKY (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(6n)!}{(n!)^3 (3n)!} \frac{13591409 + n 545140134}{(640320^3)^{n+1/2}}$$

36

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 15 újabb pontos jegyét adja π -nek.)

JONATHAN BORWEIN és PETER BORWEIN (1989):

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (A + nB)}{(n!)^3 (3n)! C^{n+1/2}},$$

ahol

$$A := 212175710912\sqrt{61} + 1657145277365$$

$$B := 13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750$$

$$C := [5280(236674 + 30303\sqrt{61})]^3.$$

(Minden újabb tag hozzávétele kb. 31 újabb pontos jegyét adja π -nek.)

DAVID BAILEY, PETER BORWEIN és

SIMON PLOUFFE (1996):

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right).$$

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia; 1761 Lambert; 1882 Lindemann, (normális?)

$$\delta) e \approx 2,71\dots \left(e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ; \right.$$

folyamatos kamatozás; Euler-szám.)

Bizonyítsuk be, hogy

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Megoldás. Jelöljük a (1) sor n -edik részletösszegét s_n -nel, azaz

$$(2) \quad s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

38

Be fogjuk látni, hogy $s_n \rightarrow e$, ha $n \rightarrow \infty$.

A binomiális tétel alkalmazásával adódik,
hogy

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n!} \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots \\
&+ \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} \\
&\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n,
\end{aligned}$$

tehát azt kaptuk, hogy

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n.$$

Most rögzítsünk egy $k \in \mathbb{N}^+$ számot. Legyen $n > k$, és $(1 + \frac{1}{n})^n$ -nek a binomiális kifejtéséből hagyjuk el a $(k+1)$ -edik utáni tagokat. Ezzel az $(1 + \frac{1}{n})^n$ kifejezést csökkentjük, azaz

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &> 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \frac{1}{2!} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ha $n \rightarrow \infty$, a bal oldal határértéke e , a

jobb oldalé pedig (k rögzített)

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Ebből tehát az adódik, hogy

$$(4) \quad e \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = s_k.$$

Mivel (4) minden k -ra igaz, így k helyett n -et írva és figyelembe véve (3)-at, azt kapjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq s_n \leq e.$$

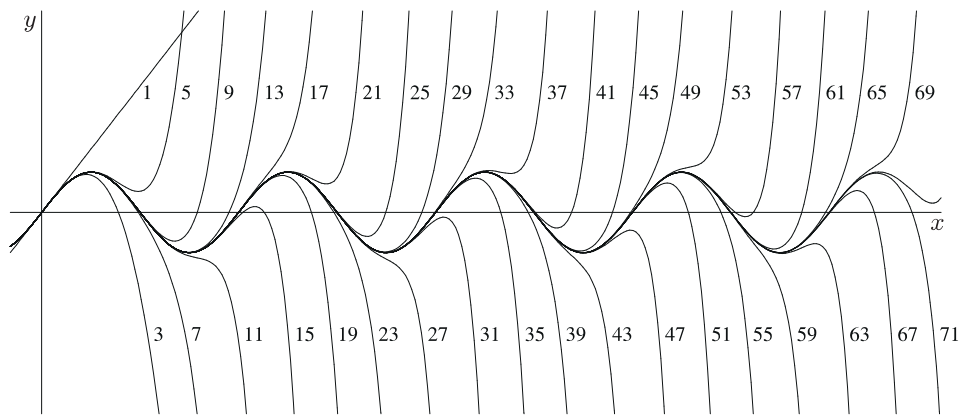
A rendőrelv alapján adódik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$, azaz (1)-t sikerült belátnunk.

Megjegyzés: irracionalitás; transzcendencia ($n \cdot \sin(2\pi en!) \rightarrow 2\pi) \pi + e$???)

$$\varepsilon) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

42

(Euler; Taylor)



Egy porszem virágot terem,

S egy szál vadvirág az eget,
Fogd föl tenyeredbe a végtelent,
S egy perc alatt élj évezredet.

(W. Blake)