2011. 09. 17.

Feladatok

(Valós függvénytan, 2011)

1. Igaz-e, hogy megszámlálhatóan végtelen sok σ-gyűrű metszete is σ-gyűrű?
2. Mutassa meg, hogy ha $\mu^*(H) = 0$, akkor $\forall\, A \subseteq H$ halmaz L-mérhető (a μ^* a Lebesgue-féle külső mértéket jelöli)!
3. Mutassa meg, hogy egy H halmaz 0-mértékű $\Leftrightarrow$ $\exists\{I_n\}$ intervallumrendszer úgy, hogy $H \subseteq \bigcup_1^\infty I_n$ és $\sum_1^\infty |I_n| < \infty$ és $\forall\, x \in H$-ra teljesül, hogy $x \in I_n$ végtelen sok n-re!
4. Bizonyítsa be, hogy a megszámlálható halmazok 0-mértékűek!
5. Bizonyítsa be, hogy a 0-mértékű halmazok σ-gyűrűt alkotnak!
6. Van-e olyan $A \subseteq \mathbb{R}$ nem-korlátos mérhető halmaz, amelyre $0 < \mu(A) < \infty$?

7 Adjon meg olyan L-mérhető halmazt, amely nem Jordan-mérhető!

8. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{R}$ bármely korlátos részhalmazának külső mértéke véges! Megfordítható-e ez az állítás?
9. Igaz-e, hogy f mérhető $\Leftrightarrow$ f^3 mérhető?
10. Igaz-e, hogy f mérhető $\Leftrightarrow$ f^2 mérhető?
11. Bizonyítsa be, hogy ha f mérhető, akkor sgn f is mérhető!
12. Bizonyítsa be, hogy ha f monoton, akkor mérhető!

13*. Bizonyítsa be, hogy ha f folytonos, akkor mérhető!

14. Bizonyítsa be, hogy ha $f \neq 0$ s mérhető, akkor $\frac{1}{f}$ mérhető!
15. Igaz-e a Levi-tétel, ha a Lebesgue-integrált Riemann-integrálra cseréljük?
16. Igaz-e Lebesgue tétele, ha Riemann-integrált veszünk Lebesgue-integrál helyett?
17. Érvényben marad-e a Fatou-lemma, ha Riemann-integrált veszünk Lebesgue helyett?

Integrálhatók-e az alábbi függvények Lebesgue-szerint? (18-24. feladat)

18.
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in (0,1), \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus(0;1); \end{cases}$$

19.
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in [1;\infty), \\ 0, & \text{ha } x \in (-\infty;1); \end{cases}$$

20.
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha } x \in (0,1), \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus(0;1); \end{cases}$$

21.
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \in [1;\infty), \\ 0, & \text{ha } x \in (-\infty;1); \end{cases}$$

22.
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{ha } x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right); \end{cases}$$

23.
$$x \mapsto \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális}, \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális}; \end{cases}$$

(Riemann-integrálható-e ez a függvény?)

24*.

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in [1; \infty), \\ 0, & \text{ha } x \in (-\infty; 1). \end{cases}$$

25. Adjon példát olyan mérhető függvényre, amely nem Lebesgue-integrálható! (Véges illetve végtelen intervallumon is adjon példát!)
26. Bizonyítsa be, hogy ha egy függvény egy véges $[a, b]$-n mérhető és korlátos, akkor Lebesgue-integrálható!
27. Igaz-e, hogy ha egy f függvény impropriusan Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható?

28*. Bizonyítsa be, hogy ha egy f függvény abszolút impropriusan Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható!

29. Lebesgue-integrálható-e az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény?