

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat. alapszak, 2007. 06. 19.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi függvény egy primitív függvényét: (7 + 8 pont)

a)  $\frac{1}{8} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4$       b)  $\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

2. Számolja ki (8 pont):

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos 2x \, dx$$

3. Végezze el az  $\arctg \frac{x+1}{x-1}$  függvény teljes diszkusszióját! (12 pont)

4. Vizsgálja az  $e^{1/(1-x)}$  függvény szélsőértékeit, monotonitását, adja meg az értékkészletét! (10 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvénynek az  $a$  helyen lokális minimuma van?
2. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  és  $g$  függvények lineárisan függőek az  $(a, b)$  intervallumon?
3. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú monoton csökkenése és a deriváltja közötti kapcsolatot leíró tétel(eke)t!
4. Mondja ki a (sorokra vonatkozó) integrálkritériumot!
5. Mondja ki a parciális integrálás formulát (a primitív függvényre és a Riemann-integrálra vonatkozó alakot is)!
6. Mondja ki a Taylor-formuláról szóló tételt!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Az  $f$  függvényről tudjuk, hogy folytonos a  $[-1, 1]$ -en, differenciálható a  $(-1, 1)$ -en és  $f'(0) = 0$ . Igaz-e, hogy mindig található olyan  $a, b$  számok,  $-1 \leq a < 0 < b \leq 1$ , amelyekre  $f(a) = f(b)$  fennáll?
2. Számolja ki az  $y^2 = x(x-1)^2$  egyenletű zárt görbe által határolt területet!
3. Az  $f$  függvényről tudjuk, hogy folytonos a  $[0, 1]$ -en és  $\int_0^1 f^2(x) \, dx = 0$ . Igaz-e, hogy  $f$  szükségképpen állandó?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!