

VIZSGADOLGOZAT
mat. alapszak, 2007. 05. 29.

A. Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (6 + 7 pont)

a) $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$ b) $\frac{1}{x\sqrt{x^3 - 1}}$

2. Számolja ki (9 pont):

$$\int_0^1 \frac{\log(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$$

3. Számolja ki az $x^2 + y^2 = 8$ és az $y = \frac{1}{2}x^2$ egyenletű görbék által határolt mindkét korlátos tartomány területét! (8 pont)

4. Hol differenciálható az $\arcsin(\cos x)$ függvény? Mi a deriváltja? (7 pont)

5. Vizsgálja az $e^{\sin x} - \sin x$ függvény szélsőértékeit, adja meg az értékkészletét! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a középérték-tétel Lagrange-féle alakját!
2. Mit ért az alatt, hogy két függvény lineárisan független?
3. Mondja ki a hányadosfüggvény integrálhatóságáról szóló tételt!
4. Mit ért az alatt, hogy az f függvény az $\langle a, b \rangle$ intervallumon konkáv?
5. Mondja ki a differenciálható függvény helyi maximuma és a deriváltja közti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (Szüks., illetve elégs. feltételek.)
6. Mondja ki a hatványsor differenciálhatóságáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Fogalmazza meg (pozitív állító alakban az oszcillációs kritérium *tagadását* (az az $[a, b]$ intervallumon korlátos f függvény ...))

2. Van-e az $y'' + 4y' - 5y = 0$ differenciálegyenletnek az egész \mathbb{R} -en korlátos, nem konstans megoldása?

3. Az $f : [1, \infty)$ függvényről tudjuk, hogy az $\int_1^\infty f(x) dx$ improprius integrál létezik. Igaz-e, hogy szükségképpen $f(x) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow \infty$?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!