

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat. alapszak, 2007. 05. 22.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az alábbi függvények egy primitív függvényét: (7 + 8 pont)

a)  $\frac{x \cos x}{\sin^3 x}$       b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{4-x} + \sqrt{4-x}}$

2. Számolja ki (9 pont):

$$\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Igazolja, hogy ha  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , akkor  $x + \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{tg} x$  (8 pont)!

4. Végezze el az

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

függvény teljes diszkusszióját! (13 pont)

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Taylor tételt!
2. Mondja ki az oszcillációs kritériumot!
3. Mondja ki az integrálfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
4. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon konvex?
5. Mondja ki a differenciálható függvény szigorú csökkenése és a deriváltja közti kapcsolatot leíró tétel(eke)t! (Szüks., illetve elégs. feltételek.)
6. Mondja ki a függvénytörzs integrálhatóságáról szóló tételt!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Legyen  $f$  folytonos a  $(0, 1)$ -en. Konvergens-e az

$$f_n(x) := \frac{n}{2} \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t) dt$$

függvénytörzs?

2. Adjon példát olyan differenciálható függvényre, amelynek valamely  $a$  helyen szigorú szélsőértéke van, de a deriváltja nem vált előjelet!
3. Legyen  $f$  egy legalább másodfokú polinom,  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 2$ . Igaz-e, hogy mindig van olyan  $\xi \in (0, 2)$ , amelyre  $f'(\xi) > 1$ ?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!