

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat. alapszak I. évf., 2007. 01. 23.

**A. Feladatok**

1. Legyen  $f(x) := \arcsin\left(\frac{x+3}{x+2}\right)$ . Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (6+7+6 pont)

a)  $(\sqrt{n^2 + 3n + 4} - \sqrt{n^2 - 3n - 4}) (n \rightarrow \infty)$

b)  $\frac{x + \sin 2x}{4x + \sqrt[3]{x}} (x \rightarrow 0)$       c)  $\sqrt[n]{3^n - 2^n} (n \rightarrow \infty)$

3. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$  sor? (7 pont)

4. Legyen  $f(x) := \frac{1}{1-(2)^{\lg x}}$ . Hol folytonos? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (9 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény jobboldali határértéke az  $a$  helyen  $-\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $I$  intervallumon?
3. Definálja az adott  $f$  függvény inverzét!
4. Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!
5. Mondja ki a függvények hányadosának folytonosságáról szóló tételt!
6. Mondja ki a rendőr-elvet!

**C. További kérdések** (4 × 6 pont)

1. Vizsgálja az  $x_0 := 1, x_{n+1} := \frac{x_n}{4} + 6$  sorozat konvergenciáját!
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az  $f$  függvény *nem* monoton az  $I \subset D_f$  intervallumon!
3. Adjon példát olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amelyre  $f(x + \frac{1}{n}) \rightarrow f(x)$ , ha  $n \rightarrow \infty$ , de  $f$  nem folytonos  $x$ -ben!
4. Adjon példát olyan sorozatra, amelynek végtelen sok (különböző) torlódási pontja van!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!