

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat. alapszak I. évf., 2007. 01. 16.

**A. Feladatok**

1. Adja meg az  $f(x) := \arcsin(x + 3 - |x + 2|)$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (6 + 6 pont)

a)  $\left(\frac{5n-8}{n+7}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$       b)  $\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1}-n)} \quad (n \rightarrow \infty)$

3. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$  sor? (7 pont)

4. Hol konvergens a  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$  függvénysor? (8 pont)

5. Legyen  $f(x) := 2^{\frac{x-2}{1-x}}$ . Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény az  $a$  helyen jobbról folytonos? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az  $\alpha$  szám az  $a_n$  sorozatnak torlódási pontja?

3. Definiálja két sor Cauchy-féle szorzatsorát!

4. Mondja ki a gyökkritériumot (mindhárom alakban)!

5. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!

6. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!

**C. További kérdések** (4 × 6 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/5 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $[a, b]$  intervallumon *nem* egyenletesen folytonos!

3. Van-e olyan függvény, amely az  $[a, b]$  zárt intervallumon korlátos, de nem veszi fel szélsőértékeit?

4. Hol konvergens a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{3^n}$$

függvénysor?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!