

VIZSGADOLGOZAT
mat. alapszak I. évf., 2007. 01. 09.

A. Feladatok

1. Adja meg az $f(x) := \sqrt{|x+1| - |x-1|}$ függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (6 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 7 pont)

$$\text{a) } \sqrt[n]{\frac{5^n - n3^n}{2n^2 + n}} \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{b) } \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} \quad (x \rightarrow 4)$$

3. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ sor? (6 pont)

4. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{n} x^n$ sor? (8 pont)

5. Legyen $f(x) := \log_2 \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény határértéke az a helyen $-\infty$? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az f függvény az (a, b) intervallumon Bolzano–Darboux tulajdonságú?

3. Definiálja a 3^x függvényt!

4. Mondja ki a majoránskritériumot!

5. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

6. Mondja ki a rendőr-elvet!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/5 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában) a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumban szereplő feltétel tagadását!

3. Adjon példát olyan pozitív tagú sorra, amelyre $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ és $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$!

4. Ábrázolja az $\arctg(\operatorname{tg} x)$ és a $\operatorname{tg}(\arctg x)$ függvényeket!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!