VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf., 2007. 01. 03.

A. Feladatok

1. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7+6+7 pont)

a) $\sqrt[n]{\dfrac{n^3+3}{4n^2-5}}$ $(n \to \infty)$ b) $\dfrac{n \operatorname{arc\,tg} n}{n^2-3}$ $(n \to \infty)$ c) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$ $(x \to 0)$

2. Konvergens-e, abszolút konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+n+1}$ sor? (6 pont)

3. Hol konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ sor? (8 pont)

4. Legyen $f(x) := \frac{x^2-2x}{x^2+x}$. Hol folytonos? Hol monoton? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény balról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Mit jelent az, hogy az f_n függvénysorozat a H halmazon egyenletesen konvergál az f függvényhez?

3. Definiálja az adott f és g függvények $f(g)$ összetételét!!

4. Mondja ki a hányadoskritériumot!

5. Definiálja az $\arcsin x$ függvényt!

6. Mit ért azalatt, hogy egy (numerikus) sor konvergens?

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Mutassa meg, hogy az A/4 feladatban szereplő függvény invertálható; adja meg az inverzét (ÉT, ÉK-t is)!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az f függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subset D_f$ intervallumon!

3. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy $\forall n : a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2006}{2007}$. Igaz-e, hogy az a_n sorozat szükségképpen konvergens?

4. Igaz-e, hogy ha egy függvény az (a, b) intervallumon invertálható, akkor szükségképpen szigorúan monoton is?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!