VIZSGADOLGOZAT

mat. alapszak I. évf., 2006. 12. 28.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \sqrt{\arcsin(x + 3 - |x + 2|)}$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (6+6 pont)

$$\text{a)}\quad \sqrt{n}(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\,)\ (n \to \infty) \qquad \text{b)}\quad \frac{x - \sin 2x}{3x + x^{4/3}}\ (x \to 0)$$

3. Hol konvergens a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-nx}$ fügvénysor? (7 pont)

4. Ábrázolja a $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)$ és az $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ függvényeket! (7 pont)

5. Legyen $f(x) := \frac{1}{2 - 2^{\operatorname{tg} x}}$. Hol folytonos? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (9 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény jobboldali határértéke az a helyen c? (Mindkét definíciót adja meg!)

2. Definiálja a $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz supremumát (a formális definíciót adja meg)!

3. Definiálja az adott f függvény inverzét!

4. Mondja ki a Leibniz-féle kritériumot!

5. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-féle kritériumot!

6. Mondja ki a Cauchy–Hadamard tételt!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $(2 + \frac{1}{n})^{-n} \to 0$!

2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az f függvény *nem* egyenletesen folytonos az $I \subset D_f$ intervallumon!

3. Adjon példát olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre, amelyre $f(x + \frac{1}{n}) \to f(x)$, ha $n \to \infty$, de f nem folytonos x-ben!

4. Adjon példát olyan sorozatra, amelynek végtelen sok (különböző) torlódási pontja van!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!