

VIZSGADOLGOZAT
mat. alapszak I. évf., 2006. 12. 19.

A. Feladatok

1. Legyen $f(x) := \arcsin \frac{1}{|x|} + \log_2(5 - x^2)$. Határozza meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (7 pont)
2. Mi a határértéke az $\sqrt[n]{\frac{n^5 - 5n + 3}{n^4 + n^2 + 1}}$ sorozatnak? (6 pont)
3. Legyen $f(x) := x^{2n} - x^n + 1$. Hol konvergens ez a függvénysorozat? Mi a határfüggvénye? (7 pont)
4. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$ sor? (7 pont)
5. Hol konvergens a $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_3 x)^n$ függvénysor? Mi az összege? (7 pont)
6. Legyen $f(x) := \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x}$. Hol folytonos? Vizsgálja a jellegzetes limeseket, vázlatosan ábrázolja a függvényt! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mit jelent az, hogy az f függvény balról folytonos az a helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
2. Definiálja az $\operatorname{arc} \operatorname{tg}$ függvényt!
3. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak az $\alpha \in \mathbb{R}$ torlódási pontja?
4. Mondja ki a gyökkritériumot (mindhárom alakban)!
5. Mondja ki a Bolzano–Weierstrass tételt!
6. Mondja ki a (sorozatokra vonatkozó) rendőr-elvet!

C. További kérdések (4 × 6 pont)

1. Legyen $x_1 := 1$, $x_{n+1} := x_n + \frac{1}{x_n}$. Konvergens-e ez a sorozat?
2. Hol egyenletesen konvergens az A/3 feladatban szereplő függvénysorozat?
3. Az (a_n) sorozatról tudjuk, hogy csak egy torlódási pontja van. Igaz-e, hogy szükségképpen konvergens?
4. Adjon példát olyan függvényre, amely értelmezési tartományán nem szigorúan monoton, de invertálható!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!