

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak II. évf., 2006. 06. 20.

A. Feladatok

- Adja meg az $y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ függvény szélsőértékeit! (9 pont)
- Számolja ki az $\int\int_T \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$ integrált, ahol T az $x^2 + y^2 \leq x$ körlap! (10 pont)
- Tekintsük az

$$\int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

integrált. Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (7 pont)

- Számolja ki az alábbi határértéket: (5 + 6 pont)

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)^{-x^2-y^2}$

- Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az $x^{y-1} + xy \frac{\log x}{y} y' = 0$ differenciálegyenletet! (8 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

- Definiálja az adott Q kétváltozós függvény adott G görbén vett y szerinti vonalmenti integrálját!
- Mondja ki a Young tételt!
- Mit ért az alatt, hogy az $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathbb{R}^k$ pontban? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Definiálja a metrikus tér fogalmát!
- Mondja ki a Jordan tételt!
- Mondja ki a kettős integrál szukcesszív kiszámításáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

- Adjon példát olyan halmazra, amelynek torlódási pontjainak a halmaza nyílt!
- Távolságdefiníció-e az adott $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmazán a $d(f, g) := \int_a^b |f - g|$ kifejezés?
- Tekintsük az $(x^2 + y^2)^2 = y^2 - x^2$ egyenletű görbe $0 < x, y$ ívét. Hol van a legmagasabb pontja?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!