

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2006. 06. 15.

**A. Feladatok**

1. Adja meg a  $\sin x \sin y \sin(x + y)$  függvény szélsőértékeit a  $0 < x, y < \pi$  tartományon! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi vonalmenti integrálokat! (5 + 6 pont)
  - a)  $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , ahol  $L$  az  $y = x^2$  parabola  $-1 \leq x \leq 1$  íve
  - b)  $\int_L (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy$ , ahol  $L$  az  $y = \log x$  görbe  $1 \leq x \leq e^2$  íve
3. Számolja ki az

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_{\cos x}^1 y^4 dy \right) dx$$

integrált, ábrázolja az integrációs tartományt, cserélje föl az integráció sorrendjét! (9 pont)

4. Számolja ki az alábbi határértéket: (8 pont)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2y^2}$
5. Integráló tényező segítségével tegye egzakttá és oldja meg az  $2y + xy^3 + (x + x^2y^2)y' = 0$  differenciálegyenletet! (8 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Definiálja a  $T \subset \mathbb{R}^2$  tartomány beosztását és egy kétváltozós függvény adott tartományon vett alsó integrálközelítő összegeit!
2. Mondja ki az egymásba skatulyázott zárt halmazokról szóló tételt!
3. Mit ért az alatt, hogy egy kvadratikus alak indefinit?
4. Definiálja a normált tér fogalmát!
5. Mondja ki az implicitfüggvény-tételt!
6. Mondja ki az összetett függvény parciális deriválhatóságáról szóló tételt!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Tekintsük az  $\int \int_D f(x, y) dx dy$  integrált, ahol  $D$  az  $a \leq x \leq b$ ,  $\alpha x \leq y \leq \beta x$ ,  $0 < a, b, \alpha, \beta$  tartomány. Alkalmazza az integrálra az  $u = x$ ,  $v = \frac{y}{x}$  transzformációt!
2. Távolságdefiníció-e az adott  $[a, b]$  intervallumon (Riemann szerint) integrálható függvények halmazán a  $d(f, g) := \int_a^b |f - g|$  kifejezés?
3. Legyen

$$I_r := \int_{K_r} \frac{y dx - x dy}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

ahol  $K_r$  az  $x^2 + y^2 = r^2$  kör pozitív irányításban. Határozza meg  $I_r$  határértékét, ha  $r \rightarrow \infty$ !

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!