

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2006. 05. 23.

**A. Feladatok**

1. Adja meg az  $xy(4 - x - y)$  függvény szélsőértékeit! (9 pont)
2. Tekintsük az  $\int_0^1 (\int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy) dx + \int_1^2 (\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy) dx$  integrált! Ábrázolja az integrációs tartományt és cserélje föl az integráció sorrendjét! (8 pont)
3. Számolja ki az  $\iint_T \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$  integrált, ahol  $T$  az  $x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$  tartomány! (9 pont)
4. Számolja ki az alábbi függvények határértékét, ha  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ : (6 + 6 pont)

a)  $\frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$       b)  $(x + y) \sin \frac{1}{x} \arccos \left( \frac{1}{2} + y \right)$

5. Számolja ki az

$$\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$$

ahol az  $L$  görbe az  $x^2 + y^2 = 4$  görbe  $(0, -2)$ -ből  $(0, 2)$ -be vezető jobboldali íve! (7 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Cauchy–Bunyakovszkij egyenlőtlenséget!
2. Definiálja egy  $H \subset \mathbb{R}^2$  korlátos halmaz  $n$ -edik belső sokszögét!
3. Mit ért az alatt, hogy az  $f$  függvény folytonos az  $A \in \mathbb{R}^k$  pontban? (Mindkét definíciót adja meg!)
4. Mondja ki a (Lagrange-féle) középérték-tételt többváltozós függvényre!
5. Mondja ki a vonalintegrál útfüggetlenségének feltételét (a parciális deriváltak segítségével)!
6. Mondja ki a kétváltozós függvény szélsőértéke létezésének elegendő feltételét!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Legyen  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos. Számolja ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2 \pi} \iint_{x^2 + y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy.$$

2. Vizsgálja az  $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$  függvény parciális és totális differenciálhatóságát az origóban!
3. Van-e olyan Jordan szerint nem mérhető halmaz, amelynek a) belseje, b) lezártja mérhető?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!