

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2006. 01. 24.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az  $r^2 + \varphi^2 = 1$  poláregyenletű görbe által határolt korlátos zárt síkrész területét! (6 pont)

2. Számolja ki az alábbi integrált: (8 pont)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

3. Oldja meg az  $y' = (x+y)^2$  differenciálegyenletet! (8 pont)

4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: (8 + 6 pont)

a)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \frac{n+1}{n-1}$       b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)} e^{-n}$

5. Hol konvergens az alábbi függvénysorozat? Mi a limese? Adjon meg (minél bővebb) intervallumot, ahol a konvergencia egyenletes! (9 pont)

$$x^{2n} - x^n + 1$$

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a hányadoskritériumot! (mindkét alakban, tehát a  $\overline{\lim}$ -os, és a limest nem tartalmazó alakot is)!

2. Hogyan adhatjuk meg az  $y'' + ay = 0$  differenciálegyenlet két lineárisan független megoldását?

3. Definiálja az egyszerű görbeív fogalmát!

4. Definiálja adott függvény Taylor-sorát!

5. Mondja ki a Riemann lemmát!

6. Mondja ki a számsorok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritériumot!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Vázlatosan ábrázolja az  $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$  egyenletű görbét. Korlátos-e?

2. Adjon meg (minél bővebb) intervallumo(ka)t, ahol az alábbi sor egyenletesen konvergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

3. Legyen  $f$  az  $[a, b]$  intervallumon folytonosan differenciálható. Egyenletesen konvergense az  $n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$  függvénysorozat?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!