VIZSGADOLGOZAT

mat.tanár szak II. évf., 2006. 01. 10.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}$ sorozat határértékét! (7 pont)

2. Számolja ki az alábbi integrált: (8 pont)

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\,dx$$

3. Oldja meg az $xy' = 2(y-\sqrt{xy}\,)$ differenciálegyenletet! (8 pont)

4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: $(7+8$ pont)

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n\cdot n!}{n^n} \qquad\qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

5. Hol konvergens az alábbi függvénysor? (7 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{3^n}$$

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a Dirichlet-féle kritériumot!
2. Definiálja az egyszerű görbeív fogalmát!
3. Mit ért azalatt, hogy az f_n függvénysorozat egyenletesen konvergens?
4. Mondja ki a hatványsor differenciálhatóságáról szóló tételt!
5. Hogyan határozhatók meg egy (inhomogén) másodrendű lineáris differenciálegyenlet összes megoldásai?
6. Mondja ki a lokalizációs tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha a_n monoton csökkenő és $\sum a_n$ konvergens, akkor szükségképpen $na_n \to 0$?

2. Megválaszthatók-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pm\frac{1}{n^{2/3}}$$

sorban az előjelek úgy, hogy az összeg 2006 legyen?

3. Igaz-e, hogy az $y''+7y=0$ differenciálegyenlet minden megoldása korlátos $\mathbb{R}$-en?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!