

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak II. évf., 2006. 01. 03.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az  $x^2 + y^2 = 8$  és az  $y = \frac{1}{2}x^2$  egyenletű görbék által határolt mindkét korlátos zárt tartomány területét! (8 pont)
2. Számolja ki az alábbi integrált: (8 pont)

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}} dx$$

3. Oldja meg az  $(y - x + 4)y' = x + y + 2$  differenciálegyenletet! (8 pont)
4. Konvergensek-e, abszolút konvergensek-e az alábbi sorok: (8 + 7 pont)

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{\pi}{2^n}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)/2} \frac{1}{\log n}$

5. Hol konvergens az alábbi függvénysor? (6 pont)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mondja ki a gyökkritériumot! (mindkét alakban, tehát a  $\overline{\lim}$ -os, és a  $\liminf$ -est nem tartalmazó alakot is)!
2. Adja meg a derékszögű és polárkoordináták közötti kapcsolatokat!
3. Definiálja két sor Cauchy-szorzatát!
4. Definiálja az  $f$  függvény 0 körüli Taylor-sorát!
5. Mi állíthat két függvény lineáris függőségéről, ha tudja, hogy Wronsky determinánssuk 0 az  $[a, b]$  intervallumon?
6. Mondja ki a függvénysorozat határfüggvényének folytonosságáról szóló tételt!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Igaz-e, hogy ha a  $\sum a_n$  sor konvergens, akkor a  $\sum a_n^2$  sor is szükségképpen konvergens?
2. Van-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$$

sornak olyan átrendezése, amelynek összege 2006?

3. Igaz-e, hogy az  $y'' + 7y = 0$  differenciálegyenlet minden megoldása korlátos  $\mathbb{R}$ -en?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy kézzel írott egy lapos képletgyűjtemény.

Jó munkát!