

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2005. 01. 27.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az

$$\sqrt{|x+1| - |x-1|}$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (8 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 6 + 6 pont)

a)  $\cos \sqrt{n+1} - \cos \sqrt{n}$  ( $n \rightarrow \infty$ )      b)  $(\frac{\pi}{2} - x) \operatorname{tg} x$  ( $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ )

c)  $\sqrt[n]{\frac{4^n - 3^n}{2n^2 - 3n + 4}}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

3. Hol folytonos az

$$f(x) := \sqrt{\frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2}}$$

függvény? Hol monoton? Adja meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! Adja meg a függvény inverzét (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (17 pont)

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!
2. Mi ért az alatt, hogy az  $f$  függvény differenciálható  $a$ -ban?
3. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $\langle a, b \rangle$  intervallumon?
4. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény baloldali határértéke az  $a$  helyen  $-\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Definiálja az  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  függvényeket, ahol  $n$  páros természetes szám!
6. Mondja ki a folytonos függvények összetételéről szóló tételt!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Mutasson példát olyan  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amely egyetlen intervallumon sem monoton, de invertálható!
2. Az  $a_n$  sorozatról tudjuk, hogy monoton és pontosan egy torlódási pontja van. Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?
3. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában) a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle kritériumban szereplő feltétel tagadását!

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!