

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2005. 01. 20.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az  $\arccos(3 - x^2) + \log_9(2x - 1)$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 8 pont)

a)  $\frac{x - \sin 2x}{3x + \sqrt[3]{x^4}} \quad (x \rightarrow 0)$       b)  $\left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 4}\right)^{-n} \quad (n \rightarrow \infty)$

3. Hol folytonos az

$$f(x) := \log_{1/3} \sqrt{\frac{3x - 9}{x - 2}}.$$

függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! Mutassa meg, hogy  $f$  invertálható! Adja meg az  $f^{-1}$  inverzfüggvényt (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (21 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

1. Mit ért azalatt, hogy az  $f$  függvény differenciálható az  $a$  helyen?
2. Mondja ki a hányadosfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
3. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $I \subseteq D_f$  intervallumon?
4. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény baloldali határértéke az  $a$  helyen  $l$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Definiálja a  $3^x$  függvényt!
6. Mondja ki a konvergens sorozatok hányadosáról szóló tételt!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

1. Legyen  $f$  az  $a$  helyen folytonos függvény. Lehet-e differenciálható az  $a$  helyen a  $g(x) := f(x) \cdot |x - a|$  ( $D_g = D_f$ ) függvény?
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában, „epszilonos” alakban), mit jelent az, hogy az  $f$  függvény *nem* folytonos az  $a$  helyen! (Feltesszük, hogy  $\exists I_a \subseteq D_f$ .)
3. Az  $f$  függvényről tudjuk, hogy a  $[0, \infty)$  félegyenesen folytonos és alulról nem korlátos. Szükségképpen igaz-e, hogy  $f(x) \rightarrow -\infty$ , ha  $x \rightarrow \infty$ ?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!