

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2005. 01. 04.

**A. Feladatok**

1. Határozza meg az  $\arccos \log_3(x^2 - x + 1)$  függvény értelmezési tartományát és értékészletét! (9 pont)
2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (8 + 6 pont)

a)  $\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{\sqrt{x^2+4x+9}}$  ( $x \rightarrow -\infty$ )    b)  $n^2 - n^2 \cos \frac{1}{n}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

3. Hol folytonos az  $\frac{3^{1/(1-x)}}{\sqrt{x^2+2}+x}$  függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, vázlatosan ábrázolja! (13 pont)
4. Legyen

$$f(x) := \frac{2^x - 3^{-x}}{2^x + 3^{-x}}.$$

Mutassa meg, hogy  $f$  invertálható! Adja meg az  $f^{-1}$  inverzfüggvényt (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (9 pont)

**B. Definíciók, tételek**

(6 × 4 pont)

1. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
2. Mit jelent az, hogy az  $l$  szám torlódási pontja az  $a_n$  sorozatnak?
3. Definiálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
4. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény folytonos az  $a$  helyen? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Mondja ki a konverens sorozatokra vonatkozó első egyenlőtlenségi tételt (amelyikben azt tesszük fel, hogy  $a_n \geq b_n$ )!
6. Definiálja az  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  függvényeket ( $n$  páros természetes szám)!

**C. További kérdések**

(3 × 7 pont)

1. Egy  $a_n$  sorozatról tudjuk, hogy bármely  $\varepsilon > 0$ ,  $p > 0$  esetén van olyan  $\nu$ , hogy bármely  $n > \nu$  értékre  $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ . Igaz-e, hogy a sorozat szükségképpen konvergens?
2. Fogalmazza meg (pozitív, állító formában), mit jelent az, hogy az  $f$  függvény *nem* monoton csökkenő az  $I \subseteq D_f$  intervallumon!
3. Egy  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  függvényről tudjuk, hogy periodikus és folytonos  $D$ -n. Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen egyenletesen is folytonos  $D$ -n? Igaz-e ugyanez, ha tudjuk, hogy  $D = \mathbb{R}$ ?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!