

**VIZSGADOLGOZAT**  
mat.tanár szak I. évf., 2004. 12. 28.

**A. Feladatok**

- Határozza meg az  $\arccos(3 - x^2) + \log_9(2x - 1)$  függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)
- Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 8 pont)

a)  $\frac{x - \sin 2x}{3x + 4 \arcsin x} \quad (x \rightarrow 0)$     b)  $\sqrt[n]{\frac{5^{n+3} - 3^{n+5}}{n^2 - n + 1}} \quad (n \rightarrow \infty)$

- Hol folytonos az  $\frac{1}{2 - 2^{\operatorname{tg} x}}$  függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! (13 pont)
- Legyen

$$f(x) := \sqrt{\frac{9 - 3x}{x - 2}}.$$

Mutassa meg, hogy  $f$  invertálható! Adja meg az  $f^{-1}$  inverzfüggvényt (az inverz ÉT-át és ÉK-ét is)! (8 pont)

**B. Definíciók, tételek** (6 × 4 pont)

- Mondja ki az intervallumon folytonos és szigorúan monoton függvény inverzéről szóló tételt!
- Mondja ki a Cauchy-féle kritériumot!
- Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény egyenletesen folytonos az  $I \subseteq D_f$  intervallumon?
- Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény jobboldali határértéke az  $a$  helyen  $-\infty$ ? (Mindkét definíciót adja meg!)
- Definiálja az arcsin függvényt!
- Mondja ki a folytonos függvények hányadosáról szóló tételt!

**C. További kérdések** (3 × 7 pont)

- Adjon példát olyan függvényre, amely a  $[0, 1]$ -en szigorúan növény, de nem rendelkezik a Bolzano–Darboux tulajdonsággal!
- Fogalmazza meg (pozitív, állító formában, „epszilonos” alakban), mit jelent az, hogy az  $f$  függvény *nem* folytonos az  $a$  helyen! (Feltesszük, hogy  $\exists I_a \subseteq D_f$ .)
- Egy függvényről tudjuk, hogy minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = 0.$$

Igaz-e, hogy a függvény szükségképpen differenciálható?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!