

VIZSGADOLGOZAT
mat.tanár szak I. évf., 2004. 12. 21.

A. Feladatok

1. Határozza meg az $f(x) := \sqrt{\sin(\arccos(1 - 2x))}$ függvény értelmezési tartományát és értékkészletét! (9 pont)

2. Számolja ki az alábbi határértékeket: (7 + 6 + 7 pont)

a) $\frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \operatorname{arc\,tg} x} \quad (x \rightarrow 0)$ b) $\frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} \quad (x \rightarrow 4)$ c) $\left(1 + \frac{1}{n!}\right)^{2^n} \quad (n \rightarrow \infty)$

3. Legyen

$$f(x) := \log_{1/3} \frac{x + 3}{x - 2}.$$

Hol folytonos ez a függvény? Adja meg a jellegzetes limeseit, értékkészletét, vázlatosan ábrázolja! (11 pont)

4. Definíció szerint (küszöbszámkereséssel) igazolja, hogy $\frac{\sqrt{n}}{3^n} \rightarrow 0!$ (5 pont)

B. Definíciók, tételek (6 × 4 pont)

1. Definiálja egy számhalmaz infimumát (a formális definíciót adja meg)!
2. Fogalmazza meg a rendőr-elvet!
3. Mit jelent az, hogy az f függvény egyenletesen folytonos az $I \subseteq D_f$ intervallumon?
4. Mit jelent az, hogy az f függvény baloldali határértéke az a helyen l ? (Mindkét definíciót adja meg!)
5. Mondja ki az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szóló tételt!
6. Mondja ki az összetett függvény folytonosságáról szóló tételt!

C. További kérdések (3 × 7 pont)

1. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy konvergens és minden n -re $a_n > 0$. Igaz-e, hogy $\sqrt[n]{a_n}$ szükségképpen konvergens?
2. Fogalmazza meg pozitív, állító formában a (sorozatokra vonatkozó) Cauchy-kritériumban szereplő feltétel tagadását!
3. Az f függvényről tudjuk, hogy a -ban folytonos. Mikor lesz differenciálható a -ban a $g(x) := |x - a|f(x)$ ($D_g = D_f$) függvény?

Ügyeljen a megfelelő *indoklásokra* az A és C részekben, a *pontos* fogalmazásra, feltételekre a B részben! A rendelkezésre álló idő 90 perc. A dolgozat írása közben elektromos eszközök, könyvek, jegyzetek nem használhatók, csak egy egy lapos, kézzel írott képletgyűjtemény.

Jó munkát!